

ТРУДЫ
XLIII КРАЕВОЙ НАУЧНОЙ
СТУДЕНЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
ПО МАТЕМАТИКЕ
И КОМПЬЮТЕРНЫМ НАУКАМ

Красноярск
СФУ
2010

УДК 51:004(045)

ББК 22.1-32.93

T78

T78 Труды XLIII краевой научной студенческой конференции по математике и компьютерным наукам / Сиб. федер. ун-т; отв. ред. Р.В. Сорокин. - Красноярск : ИПК СФУ, 2010.-136 с.

В сборнике представлены материалы докладов XLIII краевой научной студенческой конференции по математике и компьютерным наукам, проведенной 2 апреля 2010 года в Сибирском федеральном университете.

УДК 51:004(045)

ББК 22.1-32.93

*Проведение конференции поддержано
Красноярским краевым фондом поддержки
научной и научно-технической деятельности*

Содержание

Аксенова Е.Г. Применение теории широкой зависимости в кредитном эвентологическом скоринге	5
Ахмедова Ш.А. Об эффективности «стайного» алгоритма оптимизации.	9
Ахмедова Ш.А. Порождающие тройки инволюций $GL_n(\mathbb{Z})$. . .	12
Богатырева Н.Н. Статистическая оценка функции эвентологической регрессии двудольных множеств	17
Гульденбальк Ю.Б. Сравнительный анализ двух моделей ветрового движения жидкости в проточном водоеме	20
Гузова Н.В. Программно-методический комплекс по курсу "Проектирование прикладного программного обеспечения". Проектирование GUI и работы с базой данных	25
Красненко А.Н. Применение корреляционного анализа в исследовании адаптации банковской системы РФ к экономическому кризису 2007-2008гг. Визуализация облака данных	28
Дементьева Е.В. Разработка и анализ методов распараллеливания циклов с зависимостью по данным при помощи технологии OpenMP	33
Демидов Д.Б. Разбиение непрерывного сигнала с использованием вейвлет-преобразования	37
Долин В.О. Выбор топологии частиц в методе Particle Swarm Optimization при оптимизации многоэкстремальных функций различных размерностей	44
Звонков В.Б. Генетический алгоритм с автоматическим выбором типа селекции, типа скрещивания и уровня мутации	48
Ковальчук Д.Н. Задача Коши для одной системы линейных интегродифференциальных уравнений	52
Копылова В.Г. Идентификация двух коэффициентов в полулинейном параболическом уравнении	57
Кригер Е.Н. Идентификация функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении	61
Кузоватов В.И. О функциях со свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль некоторого семейства комплексных прямых	66

Лемешкова Е.Н. Решение начально-краевой задачи о совместном движении трёх вязких жидкостей в плоских слоях	70
Лопаткина М.А. Поиск экстремума функции с использованием генетического алгоритма	73
Магденко Е.П. Об определении стационарных полей температур в контактирующих конечных цилиндрах	74
Майнагашева А.С. Об одной задаче идентификации функции источника многомерного параболического уравнения с эллиптическим оператором специального вида	78
Мартынова А.А. Двухслойная модель вертикального распределения метана в приземном слое атмосферы (на примере Ханты-Мансийского автономного округа)	82
Моисейченко Е.С. Задача ранжирования банков по показателям их финансового состояния	87
Нартов Я.В. О прямой эвентологической задаче Марковица для нечетких событий	90
Романенко Г.В. О представлении решения одной обратной задачи для двумерного параболического уравнения	97
Рукосуева Д.А. Решение сопряженной спектральной задачи в круговых областях	102
Семенкина О.Е. Об эффективности алгоритма муравьиных колоний	106
Созонова И.Л. Разработка и анализ методов распараллеливания циклов с зависимостью по данным при помощи технологии OpenMP.	109
Спичак Г.А. Задача Коши для одного нелинейного интегродифференциального уравнения	114
Терновская М.А. Решение задачи управления промышленной политикой региона генетическим алгоритмом с двумя классами хромосом	119
Шерыкалова М.И. Метод эвентологического скоринга в задачах оценки риска банкротства предприятия	122
Шлепкин А.А. О подгруппах в $B(2, 5)$	127
Шуть С.В Численное решение обратных задач для математической модели вертикальной динамики экосистемы океана	130

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ШИРОКОЙ ЗАВИСИМОСТИ В КРЕДИТНОМ ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКОМ СКОРИНГЕ

Е.Г. Аксенова

Сибирский федеральный университет, Институт математики

Научный руководитель — к.ф.-м.н. Е.Е. Голденок

В работе показано применение эвентологического скоринга (Э-скоринга) в кредитной сфере. А также предлагается его развитие на основе новой теории широкой зависимости, которая даст возможность обосновать выбор одной из известных формул Э-скоринга для вычисления вероятности целевого события. Рассматриваются примеры построения широко-мультиплексивных аппроксимаций двух Э-распределений, имеющих различные структуры зависимостей (почти вложенную, наименее пересекающуюся), которые позволяют получить диапазон структур зависимостей. Определяется относительная энтропия произвольного Э-распределения и его аппроксимаций.

Оценка кредитного риска

Предположим 10 клиентов обратились в банк для получения кредита. Каждому клиенту предлагаются заполнить анкету. Затем необходимо предварительно преобразовать имеющуюся информацию в форму, поддающуюся анализу. Методом Э-скоринга оценим кредитоспособность каждого из 10 клиентов, другими словами, вычислим вероятности возврата кредита каждым клиентом.

Эвентологический скоринг является обобщением классического банковского скоринга, но в отличие от него позволяет учитывать структуру зависимостей базовых событий. Известны следующие формулы для вероятностей целевого события для трех основных структур зависимостей базовых событий:

- если базовые события образуют наименее пересекающуюся структуру, то

$$P(s|t_s(X)) = \frac{\sum_{x \in X} P(s|x)P(x)}{\sum_{x \in X} P(s|x)P(x) + \sum_{x \in X^c} P(s^c|x)P(x)}$$

— вероятность целевого события.

- если базовые события образуют независимую структуру, то

$$\begin{aligned} P(s|t_s(X)) &= \\ &= \frac{1 - \prod_{x \in X} (1 - P(x \cap s))}{1 - \prod_{x \in X} (1 - P(x \cap s)) + 1 - \prod_{x \in X^c} (1 - P(x \cap s^c))} \end{aligned}$$

- вероятность целевого события.
- если базовые события образуют вложенную структуру, то

$$P(s|t_s(X)) = \frac{\max_{x \in X} P(s|x)P(x)}{\max_{x \in X} P(s|x)P(x) + \max_{x \in X^c} P(s^c|x)P(x)}$$

— вероятность целевого события.

Итак, получены три различных результата: 3 вероятности возврата кредита каждым клиентом банка. Банк, принимая решение о выдаче кредита клиенту, может руководствоваться одной из трех вероятностей. Однако возникает вопрос, какой именно? А точнее, какую структуру зависимостей имеют базовые события?

Чтобы выяснить вид структуры базовых событий, анкета, предлагаемая клиенту, должна содержать не только вопросы о базовых событиях, но и вопросы о всевозможных пересечениях базовых событий. В принципе, это возможно, но в этом случае значительно возрастет количество вопросов в анкете. Очевидно, что в этом случае составление анкет, их заполнение клиентом и анализ результатов анкетирования превратились бы в очень трудоемкую процедуру, что дискредитировало бы основную идею скоринга, как метода быстрой оценки кредитоспособности клиента. Чтобы избежать усложнения анкеты предлагается применить новую *теорию широкой зависимости*.

О теории широкой зависимости

Новая теория широкой зависимости событий, предложенная в [1], позволяет для любого эвентологического распределения построить его широко-мультиплективную аппроксимацию — новое Э-распределение.

Определение. Широкая зависимость событий — это семейство структур вероятностных зависимостей событий, определяемых характеристическими соотношениями и ограничениями, которым обязана удовлетворять вероятностная мера.

Известно, что любое *полное*¹ эвентологическое распределение $\{p(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}$ множества событий $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, можно связать с соответствующими мультиковариациями $\tau(X)$ формулами мультиплективного обращения Мёбиуса для $X \subseteq \mathfrak{X}$:

$$p(X) = \prod_{Y \subseteq X} \tau(Y), \quad (1)$$

¹Множество событий \mathfrak{X} называется *полным*, если в его Э-распределении I-го рода все $2^{|\mathfrak{X}|}$ вероятностей не обращаются в нуль: $p(X) > 0$, $X \subseteq \mathfrak{X}$. Э-распределения полных множеств событий называются *полными Э-распределениями*. В противном случае говорят о *неполных множествах событий* и *неполных Э-распределениях*.

$$\tau(X) = \prod_{Y \subseteq X} p(Y)^{(-1)^{|X|-|Y|}}. \quad (1')$$

А мультиковариация нулевой мощности должна удовлетворять ограничению (1), обеспечивающему вероятностную нормировку:

$$\tau(\emptyset) = \left(\sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} \prod_{m>0} \prod_{Y_m \subseteq X} \tau(Y_m) \right)^{-1}.$$

Широкая 0-мультипликативная аппроксимация любой сет-функции $p(X)$ для $X \subseteq \mathfrak{X}$ равна

$$\widehat{p}^{[0]}(X) = \frac{p^{[0]}(X)}{\sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} p^{[0]}(X)} = \frac{1}{\sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} 1} = \frac{1}{2^{|\mathfrak{X}|}},$$

т.е. совпадает с равновероятным на $2^{\mathfrak{X}}$ эвентологическим распределением.

Широкая 1-мультипликативная аппроксимация любой сет-функции $p(X)$ для $X \subseteq \mathfrak{X}$ равна

$$\begin{aligned} \widehat{p}^{[1]}(X) &= \frac{p^{[0]}(X)p^{[1]}(X)}{\sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} p^{[0]}(X)p^{[1]}(X)} = \frac{p^{[1]}(X)}{\sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} p^{[1]}(X)} = \\ &= \frac{\prod_{x \in X} \tau(x)}{\sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} \prod_{x \in X} \tau(x)} = \frac{\prod_{x \in X} \tau(x)}{\prod_{x \in \mathfrak{X}} (1 + \tau(x))} = \\ &= \prod_{x \in X} \frac{\tau(x)}{1 + \tau(x)} \prod_{x \in X^c} \frac{1}{1 + \tau(x)}. \end{aligned}$$

и совпадает с распределением totally независимого множества событий.

Широкая 2-мультипликативная аппроксимация любой сет-функции $p(X)$ для $X \subseteq \mathfrak{X}$ равна

$$\begin{aligned} \widehat{p}^{[2]}(X) &= \frac{p^{[0]}(X)p^{[1]}(X)p^{[2]}(X)}{\sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} p^{[0]}(X)p^{[1]}(X)p^{[2]}(X)} = \\ &= \frac{\prod_{x \in X} \tau(x) \prod_{\{x,y\} \subseteq X} \tau(xy)}{\sum_{X \subseteq \mathfrak{X}} \prod_{x \in X} \tau(x) \prod_{\{x,y\} \subseteq X} \tau(xy)} \end{aligned}$$

и определяется параметрами: $\tau(x)$, $x \in \mathfrak{X}$ и $\tau(x, y)$, $\{x, y\} \subseteq \mathfrak{X}$ — значениями мультиковариации τ на моноплетах и дуплетах событий.

О связи теории широкой зависимости и метода Э-скоринга

Поскольку, как было отмечено выше, нам известно распределение базовых событий (будем называть его исходным), но не известно какую структуру зависимостей образуют эти базовые события. Построим диапазон структур зависимостей для данного множества базовых событий — от вложенной до наименее пересекающейся. Сначала сконструируем два Э-распределения для множества базовых событий — два полюса искомого диапазона, причем индивидуальные вероятности событий в этих распределениях должны быть такими же, как у множества базовых событий. Однако, широко-мультипликативных аппроксимаций могут быть построены только для полных Э-распределений, когда вероятности всех событий-террасок строго больше нуля. Поэтому вместо множества базовых событий со вложенной структурой зависимостей будем рассматривать множество событий с “почти вложенной” (ε -вложенной) структурой зависимостей. А вместо множества базовых событий с наименее пересекающейся структурой зависимостей будем рассматривать множество событий с “почти непересекающейся” (ε -непересекающейся) структурой зависимостей.

Затем для этих двух крайних полярных структур строятся широко мультипликативные аппроксимации до некоторого порядка включительно. В результате получаем диапазон структур зависимостей для множества базовых событий. Затем по минимуму относительной энтропии исходного распределения и его аппроксимаций находим место исходного распределения в этом диапазоне.

Заметим, что любое Э-распределение базовых событий может быть в 1-м приближении (с точностью до вероятностей событий) аппроксимировано totally-независимым Э-распределением (события независимы в совокупности), которое является его широко 1-мультипликативной аппроксимацией. Этот факт является обоснованием возможности применения формулы Э-скоринга для независимой структуры, какова бы ни была в действительности структура зависимости базовых событий.

Итак, построим все широко-мультипликативные аппроксимации из данного диапазона структур зависимостей, причем все эти Э-распределения имеют одни и те же фиксированные индивидуальные вероятности событий $\mathbf{P}(x), \mathbf{P}(y), \mathbf{P}(z)$.

Сравним Э-распределение исходного триплета событий с каждой широко-мультипликативной аппроксимацией. Известной мерой сравнения распределений является относительная энтропия.

Определим место исходного распределения в построенном диапазоне: та из широко-мультиплекативных аппроксимаций, на которой относительная энтропия Э-распределения базовых событий имеет минимальное значение, не только указывает место этого Э-распределение в диапазоне структур зависимостей, но и позволит обосновать применение одной из трех формул Э-скоринга.

Список литературы

- [1] Воробьев О.Ю. *Эвентологические структуры и эвентологический скринг.* // Воробьев О.Ю. ФАМ Записки. Красноярск: ИВМ СО РАН, 2004- N8, с73-111.
- [2] Воробьев О.Ю. *Эвентология, Эвентология и ее применение.* Красноярск, 2007, с273-287
- [3] Воробьев О.Ю., Клочков С.В. *Эвентология риска, Эвентологический анализ задач распределения и заполнения ресурсов,* Красноярск, 2007.
- [4] Воробьев О.Ю. *Широкая зависимость событий и аппроксимация эвентологических распределений широко-мультиплекативными сет-функциями* // Труды конференции ФАМ-2009. Красноярск, 2009.

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ «СТАЙНОГО» АЛГОРИТМА ОПТИМИЗАЦИИ

Ш.А. Ахмедова

Сибирский федеральный университет, Институт математики
Научный руководитель — д.т.н. Е.С. Семенкин

Работа посвящена исследованию эффективности "стайного" ("роевого") алгоритма (particle swarm optimization, PSO) оптимизации на тестовых функциях вещественных переменных.

Идея алгоритма PSO впервые была сформулирована Дж. Кеннеди и Д. К. Эберхартом в 1995 году [1], она была почерпнута из социального поведения некоторых животных - стаи птиц, стада копытных или косяка рыб.

Алгоритм начинает работу с создания популяции случайным образом. Строки в PSO называются частицами. Строки-частицы представляют собой вектор координат точки в пространстве оптимизации (вещественных чисел). Каждая частица передвигается по поверхности графика функции с какой-то скоростью. Частицы изменяют свою скорость и координаты, основываясь на собственном опыте и опыте других частиц, что выражается формулами:

$$v_{m,n}^{new} = v_{m,n}^{old} + C_1 * r_1 * (p_{m,n}^{local-best} - p_{m,n}^{old}) + C_2 * r_2 * (p_{m,n}^{global-best} - p_{m,n}^{old}),$$

$$p_{m,n}^{new} = p_{m,n}^{old} + v_{m,n}^{new},$$

где $v_{m,n}$ - скорость частицы, $p_{m,n}$ - координаты частицы, r_1, r_2 - независимые случайные числа из отрезка $[0, 1]$, распределенные по равномерному закону, C_1, C_2 - коэффициенты обучения из отрезка $[0, 2]$, $p_{m,n}^{local-best}$ - лучшие координаты, когда-либо найденные данной частицей, $p_{m,n}^{global-best}$ - лучшие координаты, когда-либо найденные всей стаей.

Сначала алгоритм PSO обновляет вектор скорости каждой частицы, а затем прибавляет этот вектор к вектору координат соответствующей частицы. Обновление вектора скорости осуществляется с учетом наилучшего глобального решения, соответствующего наименьшему значению минимизируемой функции, когда-либо найденному всей стаей, и с учетом наилучшего локального решения, соответствующего наименьшему значению функции, когда-либо найденному данной частицей популяции. Если наилучшее локальное решение имеет значение функции, меньшее, чем значение функции в текущем глобальном наилучшем решении, то оно становится лучшим, когда-либо найденным решением для всей стаи. Использование скорости частицы в каком-то смысле напоминает об алгоритмах локальной оптимизации, использующих информацию о производных, т.к. скорость - это производная от координат.

Константа C_1 называется когнитивным (т.е. познавательным) параметром, она позволяет учитывать "собственный опыт" (историю) частицы, а константа C_2 - социальным параметром, позволяющим частице "учитывать опыт" всей стаи.

Преимущество PSO заключается в простоте реализации и в наличии малого количества параметров, требующих настройки. PSO способен работать со сложными целевыми функциями, имеющими множество локальных минимумов.

Частицы, которые сначала равномерно распределены по поверхности графика функции, с течением времени (от поколения к поколению) начинают группироваться ("сбиваться в стаи") около локальных минимумов, причем наибольшая стая собирается около глобального минимума. При этом почти всегда имеются частицы, находящиеся в стороне от таких стай, а также частицы, выскакивающие за границы допустимой области.

Исследование эффективности стайнного алгоритма проводилось на тестовых функциях двух независимых переменных:

1.Функция Розенброка.

$I(x, y) = 100 * (y - x^2)^2 + (1 - x)^2$, $x \in [-2, 2]$, $y \in [-2, 2]$, $\min = I(1, 1) = 0$;

2.Функция Грибанка.

$$I(x, y) = \frac{-10}{0.005 * (x^2 + y^2) - \cos(x) * \cos(\frac{y}{\sqrt{2}}) + 2} + 10, \quad x \in [-16, 16], \quad y \in [-16, 16], \quad \min = I(0, 0) = 0.$$

Функция Розенброка - одноэкстремальная, т.е. имеет единственный локальный минимум, являющийся и глобальным. Сложность задачи оптимизации данной функции заключается в том, что она имеет узкий изогнутый "овраг", на дне которого и находится искомое решение.

Функция Гриванка - многоэкстремальная, причем имеет большое количество локальных минимумов, многие из которых незначительно отличаются от глобального. К тому же зоны притяжения локальных минимумов очень узкие, что также существенно затрудняет глобальную оптимизацию этой функции.

Так как стайный алгоритм является стохастическим, то его эффективность определялась усреднением по 1000 прогонам. Критерием эффективности служила надежность решения задачи, т.е. процент прогонов, давших точное решение задачи. Изучалась зависимость эффективности стайного алгоритма от выделяемого вычислительного ресурса, т.е. сочетания количества частиц и числа шагов развития популяции. Количество частиц изменялось от 10 до 1000 (первая строка в таблице 1), а количество шагов от 10 до 100 (первый столбец в таблице 1). Таким образом, выделяемый ресурс изменялся от 100 до 100000 вычислений целевой функции.

Таблица 1: Результаты сравнительного анализа эффективности стайного алгоритма.

	10	25	50	75	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
10	0	0	0.01	0.05	0.07	0.11	0.24	0.3	0.34	0.42	0.5	0.59	0.61	0.69
20	0	0	0.07	0.08	0.17	0.29	0.43	0.48	0.6	0.63	0.74	0.79	0.86	0.89
30	0.003	0.03	0.05	0.08	0.19	0.23	0.53	0.67	0.71	0.84	0.85	0.9	0.96	0.963
50	0.032	0.08	0.17	0.22	0.32	0.58	0.79	0.85	0.86	0.87	0.88	0.88	0.98	1
70	0.02	0.09	0.23	0.32	0.41	0.68	0.83	0.92	0.96	0.98	0.98	0.99	1	1
100	0.033	0.1	0.29	0.39	0.47	0.79	0.89	0.96	0.98	0.99	1	1	1	1

Затем была проанализирована зависимость эффективности PSO от коэффициентов обучения C_1 и C_2 . Начальные установки: 100 частиц, 100 прогонов по 100 шагов (проверка осуществлена для функции Розенброка). Результаты представлены в таблицах 2 и 3.

Таким образом, для обеспечения высокой эффективности на данных тестовых функциях стайному алгоритму требуется не менее 35000 вычислений функции, причем наиболее высокая эффективность достигается при коэффициентах обучения величины от 0.1 до 0.2.

В дальнейшем предполагается увеличивать число тестовых функций до получения репрезентативного проверочного множества.

Таблица 2: Зависимость эффективности от коэффициентов обучения при $C_1, C_2 \in [0.1, 1]$.

%	36.6	42.4	38.6	43	43.1	39.5	44.6	44.8	42.7	46.8	47.8	45.1	46.7	52.1
C_1	1	1	0.9	0.9	0.9	0.8	0.8	0.8	0.7	0.7	0.7	0.6	0.6	0.6
C_2	1	0.9	1	0.9	0.8	0.9	0.8	0.7	0.8	0.7	0.6	0.7	0.6	0.5
%	48.3	51.7	52.8	49.8	52.8	57.2	53.5	53.7	61.7	52.9	55.7	59.9	51.9	58.4
C_1	0.5	0.5	0.5	0.4	0.4	0.4	0.3	0.3	0.3	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1
C_2	0.6	0.5	0.4	0.5	0.4	0.3	0.4	0.3	0.2	0.3	0.2	0.1	0.2	0.1

Таблица 3: Зависимость эффективности от коэффициентов обучения при $C_1, C_2 \in [1.1, 2]$.

%	12.4	13.1	13.6	15.5	12.4	13.9	18.5	17.7	17.7	19.1	18.7	17.8	19.9	21
C_1	2	2	1.9	1.9	1.9	1.8	1.8	1.8	1.7	1.7	1.7	1.6	1.6	1.6
C_2	2	1.9	2	1.9	1.8	1.9	1.8	1.7	1.8	1.7	1.6	1.7	1.6	1.5
%	19.9	23.3	23.5	25.1	25.4	29.6	27.5	28	30.1	29.2	31.7	32.7	29.8	34.9
C_1	1.5	1.5	1.5	1.4	1.4	1.4	1.3	1.3	1.3	1.2	1.2	1.2	1.1	1.1
C_2	1.6	1.5	1.4	1.5	1.4	1.3	1.4	1.3	1.2	1.3	1.2	1.1	1.2	1.1

Список литературы

- [1] J. Kennedy, R.C. Eberhart *Particle Swarm Optimization*, *Proceedings IEEE Int'l. Conf. on Neural Networks, IV*, pp.1942-1948, 1995.

ПОРОЖДАЮЩИЕ ТРОЙКИ ИНВОЛЮЦИЙ $GL_n(\mathbb{Z})$

Ш.А. Ахмедова

*Сибирский федеральный университет, Институт математики
Научный руководитель — д.ф.-м.н. Я.Н.Нужин*

Далее $GL_n(\mathbb{Z})$ - группа обратимых $(n \times n)$ -матриц над кольцом целых чисел \mathbb{Z} , а $SL_n(\mathbb{Z})$ - подгруппа ее матриц с определителем единицы. Основным результатом работы является

Теорема 1. *Группа обратимых $(n \times n)$ -матриц $GL_n(\mathbb{Z})$ над кольцом целых чисел \mathbb{Z} , порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны тогда и только тогда, когда $n \geq 5$.*

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Через $t_{ij}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, $i \neq j$, будем обозначать трансвекции, то есть матрицы $E_n + ke_{ij}$, где E_n — единичная $(n \times n)$ -матрица, а e_{ij} — матричные единицы.

Хорошо известна

Лемма 1. Группа $SL_n(\mathbb{Z})$ порождается трансвекциями $t_{ij}(1)$ $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Положим

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Лемма 2.[1] Группа $SL_n(\mathbb{Z})$ порождается одной из трансвекций

$$t_{1n}(1), t_{i+1i}(1), t_{n-1n}(1), t_{ii+1}(1), i = 1, 2, \dots, n-1,$$

и мономиальной матрицей $\eta\mu$ для любой $(1, -1)$ -диагональной матрицы η с условием, что $\eta\mu \in SL_n(\mathbb{Z})$

Лемма 3.[2] Группа $GL_n(\mathbb{Z})$ порождается трансвекциями $t_{ij}(1)$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, и любой другой матрицей с определителем -1 . [1]

В статье приняты также обозначения $\alpha^\beta = \beta\alpha\beta^{-1}$, $[\alpha, \beta] = \alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$.

Предложение 1. Группа $GL_3(\mathbb{Z})$ порождается тремя инволюциями

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть $\mu = \gamma\beta$. Тогда

$$\begin{aligned} \alpha^\beta &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\alpha\alpha^\mu)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ \alpha^\gamma &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \epsilon = (\alpha^\gamma)^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ \zeta &= (\epsilon\gamma)\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta = (\zeta^2)^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ (\alpha\alpha^\mu)^2\theta &= t_{31}(1). \end{aligned}$$

Так как определитель матрицы α равен -1 (как, впрочем, и двух других), то в силу лемм 2 и 3 инволюции α, β, γ порождают группу $GL_3(\mathbb{Z})$.

Предложение доказано.

Предложение 2. Группа $GL_4(\mathbb{Z})$ порождается тремя инволюциями

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть $\mu = \alpha\beta$. Тогда

$$\gamma^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\gamma\gamma^\mu)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\gamma^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \eta = (\gamma^\beta)^{\beta\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\xi = ((\gamma^\beta)^\alpha)^\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \zeta = \eta(\xi(\gamma\gamma^\mu)^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\epsilon = (\zeta\gamma)\gamma^\beta\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \theta = \epsilon\alpha\gamma^\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(\gamma\gamma^\mu)^2((\theta^2\gamma^\alpha)^2)^\alpha = t_{31}(1),$$

$$t_{31}(1)\gamma^\beta = t_{21}(1).$$

Так как определитель матрицы γ равен -1 (как, впрочем, и β), то в силу лемм 2 и 3 инволюции α, β, γ порождают группу $GL_4(\mathbb{Z})$. Предложение доказано.

Однако при $n=3$ и $n=4$ порождающие инволюции не перестановочны. Перейдем к доказательству теоремы.

2. Порождающие тройки инволюций при $n \geq 5$

Подберем инволюции α, β, γ так, чтобы $\alpha\beta = \beta\alpha$, а определитель γ был равен -1 , иначе мы попадаем в специальную линейную группу.

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

При $n=2(2k+1)=(6, 10, 14, \dots)$ и $n=4k+1=(5, 9, 13, \dots)$ положим

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

При $n=2(2k+1)+1=(7, 11, 15, \dots)$ и $n=4k=(8, 12, 16, \dots)$ положим

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Доказательство теоремы 1 при $n=2(2k+1)$ и $n=4k+1$

Инволюции α и β перестановочны, кроме того, определитель γ равен -1 . Следовательно, надо получить одну из трансвекций вида:

$$t_{1n}(1), t_{i+1i}(1), t_{n-1n}(1), t_{ii+1}(1), i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Положим

$$\eta = \beta\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\alpha^\eta &= \text{diag}(-1, -1, E_{n-2})t_{32}(1)t_{n1}(-1); \\
[\alpha, \alpha^\eta] &= t_{31}(-1)t_{(n-1)1}(-1); \\
\alpha^{\eta^2} &= \text{diag}(1, -1, -1, E_{n-3})t_{12}(1)t_{43}(1); \\
\theta = [([\alpha, \alpha^\eta]\alpha^{\eta^2})^2]^\eta, [\alpha, \alpha^\eta] &= t_{(n-2)1}(-1)t_{(n-1)1}(1)t_{n1}(1); \\
[\alpha, \theta] &= t_{(n-2)1}(-2)t_{(n-1)1}(3); \\
[\alpha, \theta]^\beta &= t_{2n}(3)t_{3n}(-2); \\
[\alpha, ([\alpha, \alpha^\eta]\theta)^{\eta^2}]^{\eta^{-3}} &= t_{2n}(1)t_{3n}(-2); \\
([\alpha, ([\alpha, \alpha^\eta]\theta)^{\eta^2}]^{\eta^{-3}}([\alpha, \theta]^\beta)^{-1}) &= t_{2n}(-2); \\
(t_{2n}(-2))^\beta &= t_{(n-1)1}(-2); \\
\delta = (t_{(n-1)1}(-2))^{-1}[\alpha, \alpha^\eta] &= t_{31}(-1)t_{(n-1)1}(1); \\
\zeta = ([\alpha, \alpha^\eta]\theta)[\alpha, [\alpha, \alpha^\eta]^\eta]\delta^{-1} &= t_{(n-1)2}(1)t_{n2}(-1); \\
\xi = ((\zeta^{\eta^{-1}}))^\beta[\alpha, \theta]^\beta &= t_{2n}(1)t_{3n}(-1); \\
(\xi(t_{2n}(-2))^{-1})^{-1}[\alpha, \theta]^\beta &= t_{3n}(-1); \\
(t_{3n}(-1))^{-1} &= t_{3n}(1); \\
\xi(t_{3n}(-1)) &= t_{2n}(1); \\
(t_{2n}(1))^\beta &= t_{(n-1)1}(1); \\
(t_{(n-1)1}(1))^\eta &= t_{n2}(1); \\
[t_{3n}(1), t_{n2}(1)] &= t_{32}(1).
\end{aligned}$$

Следовательно, в силу лемм 2 и 3 инволюции α, β, γ порождают $GL_n(\mathbb{Z})$.
Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 1 при $n=2(2k+1)+1$ и $n=4k$

Проводится аналогично предыдущему случаю для соответствующих инволюций α, β, γ . Необходимо проверить, выполняются ли условия леммы 3.

Определитель γ равен -1 . Достаточно получить одну из трансвекций вида:

$$t_{1n}(1), t_{i+1i}(1), t_{n-1n}(1), t_{ii+1}(1), i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Положим $\mu = \beta\gamma$.

Тогда

$$\begin{aligned}
\alpha^\mu &= \text{diag}(-1, -1, E_{n-2})t_{32}(1)t_{n1}(1); \\
[\alpha, \alpha^\mu] &= t_{31}(-1)t_{(n-1)1}(1); \\
[\alpha, \alpha^\mu]^\mu &= t_{42}(-1)t_{n2}(1); \\
[\alpha, [\alpha, \alpha^\mu]^\mu] &= t_{41}(1)t_{(n-1)1}(-1)t_{(n-2)1}(-1)t_{n1}(1)t_{n2}(2); \\
[\alpha, [\alpha, \alpha^\mu]^\mu]^{\mu^{-1}} &= t_{(n-2)1}(-1)t_{(n-1)1}(2)t_{3n}(1)t_{(n-2)n}(-1)t_{(n-1)n}(1); \\
\delta = [[\alpha, \alpha^\mu], [\alpha, [\alpha, \alpha^\mu]^\mu]^{\mu^{-1}}] &= t_{(n-2)1}(-1)t_{(n-1)1}(1);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta &= [[\alpha, \alpha^\mu]^\mu, [\alpha, [\alpha, \alpha^\mu]^\mu]^{\mu^{-1}}] = t_{32}(-1)t_{(n-2)2}(1)t_{(n-1)2}(-1); \\
[\alpha, \theta] &= t_{31}(-1)t_{(n-2)1}(1)t_{(n-1)1}(-1); \\
\xi &= [\alpha, \theta][\alpha, \alpha^\mu] = t_{(n-2)1}(1)t_{(n-1)1}(-2); \\
\delta\xi &= t_{(n-1)1}(-1); \\
(t_{(n-1)1}(-1))^{-1} &= t_{(n-1)1}(1); \\
(t_{(n-1)1}(1))^\mu &= t_{n2}(1); \\
((t_{n2}(1))\alpha^\gamma)^2 &= t_{12}(1).
\end{aligned}$$

В силу лемм 2 и 3 инволюции α, β, γ порождают $GL_n(\mathbb{Z})$. Теорема доказана.

Список литературы

- [1] Я.Н.Нужин. *О порождаемости группы $PSL_n(\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны* // Владикавказский математический журнал, 2008, Том 10, выпуск 1, с.68-74.
- [2] Я.Н.Нужин, И.А.Тимофеенко. *Порождающие тройки инволюций линейных групп размерности 2 над колцом целых чисел* // Владикавказский математический журнал, 2009, Том 11, выпуск 4, с.59-62.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ФУНКЦИИ ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКОЙ РЕГРЕССИИ ДВУДОЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

Н.Н. Богатырева

Сибирский федеральный университет, Институт математики
Научный руководитель — к.ф.-м.н. И.В. Баранова

В работе были изучены: регрессия (в том числе парная регрессия, множественная регрессия и другое), эвентологический регрессионный анализ, условные эвентологические события, условные эвентологические распределения, теорема Байеса и эвентологическая регрессия двух множеств событий. Получена формула эвентологической регрессии для двудольных множеств случайных событий.

Регрессия (лат. regressio — обратное движение, переход от более сложных форм развития к менее сложным) — одно из основных понятий в теории вероятностей и математической статистике, выражающее зависимость среднего значения случайной величины от значения другой случайной величины или от нескольких случайных величин.

В настоящее время случаи парной и множественной регрессии хорошо

исследованы [3], однако во многих областях современной научной и практической деятельности при проведении различных исследований возникает необходимость решения задач регрессионного анализа для случая сложных статистических систем, поведение которых описывается числовыми и множественными данными. Основная трудность при проведении анализа таких систем заключается в их большой размерности, сложной структуре зависимости между элементами и разнотипности данных, описывающих их поведение. Поэтому для изучения этих систем предлагается использовать эвентологический подход, предложенный О.Ю. Воробьевым [2], который позволяет рассматривать системы как множества событий, характеризующих их поведение.

Для работы со сложными системами воспользуемся методом двудольных множеств событий, который разработан И.В. Барановой [1]. Основная идея метода заключается в представлении любой сложной системы с помощью двудольной эвентологической модели, в которой каждый элемент системы характеризуется двудольным множеством событий: его первая доля определяется случайными величинами, а вторая — случайными множествами событий. Анализ поведения элементов системы сводится к анализу эвентологических распределений соответствующих им двудольных множеств событий.

Применим к двудольным множествам эвентологический подход и выведем формулу эвентологической регрессии двудольных множеств случайных событий.

Регрессия двудольных множеств случайных событий

В [2] была О.Ю. Воробьевым предложена формула эвентологической регрессии одного множества титульных событий \mathfrak{X} на другое множество титульных событий \mathcal{Y} . Обобщим данную формулу на более сложный случай регрессии двух двудольных множеств случайных событий.

Пусть $Z = \{\mathcal{Y}, \mathfrak{X}\} = \{\mathcal{Y}_a, \mathfrak{X}_\beta, a \in A, \beta \in B\}$ — двудольное множество случайных событий и пусть даны два подмножества $s = \{\mathcal{Y}_{s_A}, \mathfrak{X}_{s_B}, s_A \subseteq A, s_B \subseteq B\}$ и $t = \{\mathcal{Y}_{t_A}, \mathfrak{X}_{t_B}, t_A \subseteq A, t_B \subseteq B\}$, $s, t \subseteq Z$.

Событие-терраска двудольного множества случайных событий представляет собой набор непересекающихся событий, где каждое событие является подмножеством соответствующего множества событий \mathcal{Y}_a или \mathfrak{X}_β :

$$ter(s) = \{\mathcal{Y}_{s_A}, \mathfrak{X}_{s_B}\}, \quad s_A \subseteq A, s_B \subseteq B \\ \mathcal{Y}_{s_A} \subseteq \mathcal{Y}_a, \quad \mathfrak{X}_{s_B} \subseteq \mathfrak{X}_\beta.$$

Событие-терраска двудольного множества может быть записано в более подробном виде:

$$ter(s) = ter\{\mathcal{Y}_{s_A}, \mathfrak{X}_{s_B}\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \bigcap_{a \in s_A} ter(\mathcal{Y}_a) \bigcap_{\beta \in s_B} ter(\mathfrak{X}_\beta) = \\
&= \bigcap_{a \in s_a} \mathcal{Y}_a(r_a) \bigcap_{\beta \in s_B} \left(\bigcap_{x_\beta \in X_\beta} x_\beta \bigcap_{x_\beta \in X_\beta^c} x_\beta^c \right),
\end{aligned}$$

где $r_a \in \mathcal{R}_a$, $X_\beta \subseteq \mathfrak{X}_\beta$.

Условная вероятность для двудольных множеств событий $s, t \subseteq Z$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
P(ter(t)|ter(s)) &= P_{|ter(s)}(ter(t)) = \\
&= \frac{P(ter(t) \cap ter(s))}{p(ter(s))}, \\
\text{зде } p(ter(s)) &= \sum_{ter(s) \subseteq Z} P(ter(s))
\end{aligned} \tag{1}$$

Эвентологическая регрессия одного двудольного множества событий $s \subseteq Z$ на другое двудольное множество событий $t \subseteq Z$, связывающая события-терраски $ter(s)$, $s \subseteq Z$ с событиями-террасками $ter(t)$, $t \subseteq Z$ имеет вид

$$ter(t) = \varphi(ter(s)), \quad s \subseteq Z.$$

Поставим задачу статистической оценки функции теоретической эвентологической регрессии на уровне α , значение которой на $s \subseteq Z$ определяется как условный α -квантиль случайногом множества t по следующей формуле:

$$Q_\alpha(t|ter(s)) = \{ter(t) \subseteq Z : P(ter(t)|ter(s)) \geq \alpha\}$$

Условные вероятности, определяющие, какие элементы $ter(t) \subseteq Z$ принадлежат значению функции Э-регрессии на $s \subseteq Z$, определяются формулами (1).

Список литературы

- [1] О.Ю. Воробьев, И.В. Баранова. *Метод двудольных множеств случайных событий в эвентологическом анализе сложных систем. Ин-т. естеств. и гуманит. наук, 2007.*
- [2] О.Ю. Воробьев. *Эвентология. Сиб. фед. ун-т., 2007.*
- [3] Е.С. Вентцель. *Теория вероятностей. Учебник для вузов, Высшая школа, 2006.*

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДВУХ МОДЕЛЕЙ ВЕТРОВОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПРОТОЧНОМ ВОДОЕМЕ

Ю.Б. Гульденбальк

Сибирский федеральный университет, Институт математики

Научный руководитель — к.ф.-м.н. Л.А. Компаниец

Рассматривается задача определения скорости ветрового движения вязкой жидкости в проточном водоеме при следующих предположениях:

- рассматривается движение в вертикальной плоскости;
- течение является стационарным;
- коэффициенты горизонтального и вертикального турбулентного обмена постоянны;
- возвышение свободной поверхности мало и влияние ветра рассматривается на невозмущенной поверхности;
- движение является медленным и нелинейными членами в уравнениях движения можно пренебречь;
- дно ровное;
- на дне ставятся условия проскальзывания.

В этом случае уравнения ветрового движения жидкости имеют вид

$$\begin{cases} K_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

а граничные условия таковы:

$$u(x, z)|_{x=0} = f_1(z), \quad (2)$$

$$u(x, z)|_{x=L} = f_2(z), \quad (3)$$

$$K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \beta, \quad \beta(x) = \frac{\tau}{\rho_0}, \quad (4)$$

$$K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=-H} = K_b u|_{z=-H}, \quad (5)$$

$$w(x, z)|_{z=0} = 0, \quad (6)$$

$$w(x, z)|_{z=-H} = 0, \quad (7)$$

$$0 < x < L, -H < z < 0.$$

Здесь $u = u(x, z)$, $w = w(x, z)$ — соответственно горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости течения; K_x , K_z — коэффициенты горизонтального и вертикального турбулентного обмена; g — ускорение свободного падения; η — возвышение свободной поверхности; f_1, f_2 — потоки жидкости через левую и правую вертикальные границы; τ — касательное напряжение ветра на водной поверхности; ρ_0 — плотность воды; $H > 0$ — глубина бассейна; $K_b = \text{const}$ — коэффициент придонного касательного напряжения. Отметим, что вариант $K_b = 0$ отвечает условию скольжения без трения, а $K_b = \infty$ — условию прилипания. Ось z направлена вертикально вверх.

Найдем решение системы уравнений (1) с граничными условиями (2)-(7). Для этого исключим параметр $\frac{\partial \eta}{\partial x}$:

Проинтегрируем (1) по $z \in [-H, 0]$

$$\begin{aligned} Hg \frac{\partial \eta}{\partial x} &= K_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-H}^0 u dz + K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{-H}^0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \int_{-H}^0 u dz + w \Big|_{-H}^0 &= 0. \end{aligned}$$

С учетом граничных условий

$$\int_{-H}^0 u dz = \int_{-H}^0 f_1 dz = \int_{-H}^0 f_2 dz = \text{const.}$$

Тогда

$$\begin{aligned} Hg \frac{\partial \eta}{\partial x} &= K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{-H}^0, \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{\beta - K_b u|_{z=-H}}{Hg}. \end{aligned}$$

В результате приходим к уравнению

$$K_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\beta - K_b u|_{z=-H}}{H} \quad (8)$$

с граничными условиями

$$u(x, z)|_{x=0} = f_1(z), \quad (9)$$

$$u(x, z)|_{x=L} = f_2(z), \quad (10)$$

$$K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \beta(x), \quad (11)$$

$$K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=-H} = K_b u|_{z=-H}. \quad (12)$$

Решение такой задачи сводится к нахождению решения неклассической (в уравнении присутствует значение искомой скорости на дне) краевой задачи для уравнения эллиптического типа в прямоугольной области. В ряде случаев решение может быть найдено методом разделения переменных.

Разобьем эту задачу на две.

Задача 1

$$K_x \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + K_z \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = 0,$$

$$u(x, z)_1|_{x=0} = f_1(z),$$

$$u(x, z)_1|_{x=L} = f_2(z),$$

$$K_z \frac{\partial u_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0,$$

$$K_z \frac{\partial u_1}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0.$$

Задача 2

$$K_x \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + K_z \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} = \frac{\beta - K_b u_1|_{z=-H} - K_b u_2|_{z=-H}}{H},$$

$$u_2(x, z)|_{x=0} = f_1(z),$$

$$u_2(x, z)|_{x=L} = f_2(z),$$

$$K_z \frac{\partial u_2}{\partial z} \Big|_{z=0} = \beta(x),$$

$$K_z \frac{\partial u_2}{\partial z} \Big|_{z=-H} = K_b(u_1 + u_2)|_{z=-H}.$$

Легко видеть, что решение исходной задачи $u(x, z) = u_1(x, z) + u_2(x, z)$.

Решение задач 1 и 2 будем искать методом разделения переменных.

В результате получаем

$$\begin{aligned} u(x, z) = & \sum_{n=0}^{\infty} (C_n^1 e^{\frac{n\pi}{H} \sqrt{\frac{K_x}{K_z}} x} + C_n^2 e^{-\frac{n\pi}{H} \sqrt{\frac{K_x}{K_z}} x}) \cos \frac{n\pi}{H} z \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (D_n^1 e^{\frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{K_x}{K_z}} z} + D_n^2 e^{-\frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{K_x}{K_z}} z} + D_n^3) \sin \frac{n\pi}{L} x. \end{aligned} \quad (13)$$

Сравним решение (15) полученное для модели с учетом горизонтальной вязкости и ранее известным решением для более простой модели Экмана, без учета горизонтальной вязкости.

$$\begin{cases} K_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Отметим, что такая постановка задачи рассматривалась в статье [1]. По этой модели было рассчитано течение в Иваньковском водохранилище.

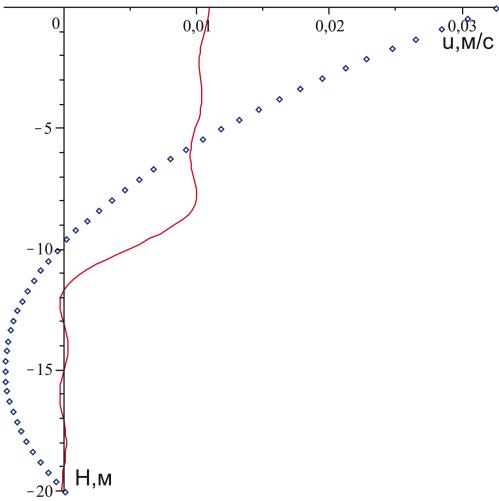


Рисунок 1: Распределение скорости по глубине вблизи левой границы бассейна

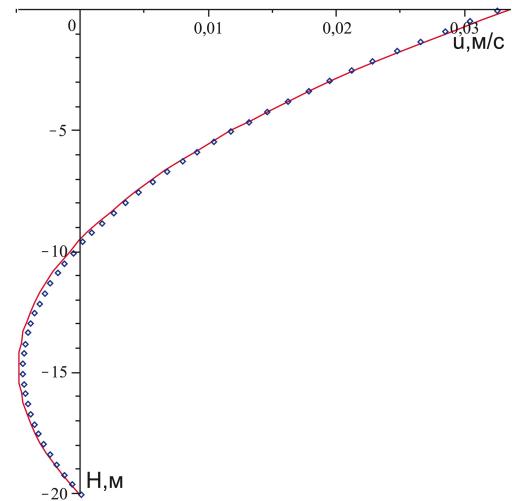


Рисунок 2: Распределение скорости по глубине в центре бассейна

На рис. 1 - 2 сплошной линией обозначено решение, полученное по модели с учетом горизонтальной вязкости, а прерывистой - по модели Экмана. Параметры: $H = 20\text{м}$, $L = 5000\text{м}$, $\beta = 0.0001\text{м}^2/\text{с}^2$, $K_z = 0.02\text{м}^2/\text{с}$, $K_x = 20\text{м}^2/\text{с}$. Скорость потока одинакова на промежутке $[-H/2, 0]$ и равна 0.01м/с .

Для случая $K_b = 0$ получаем более простые формулы [3], но в случае трехмерного течения они не всегда приемлемы.

В случае неровного дна, условия проскальзывания без трения на дне и отсутствие потоков можно выписать аналитическое решение для модели Экмана. В двух предельных случаях $K_b = 0$ и $K_b = \infty$ решение получается растяжением графика, полученного для $H = 1$, вдоль оси z и потом умножения его на H .

Проверить это свойство для модели с учетом горизонтальной вязкости пока не удалось, но показано, что и в случае этой модели можно найти аналитическое решение для некоторого класса функций, определяющих закон изменения дна, методом разделения переменных.

Получены аналитические решения для двух моделей ветрового движения жидкости, которые позволяют определить влияние различных условий на дне на характер течения.

Эти решения позволяют определить область, в которой можно применять более простую модель Экмана в зависимости от входящих параметров.

Список литературы

- [1] В.Н. Зырянов, А.П. Фролов. *Природные компенсационные противотечения в водохранилищах равнинного типа.*// Вод. ресурсы. – 2006. – Т.1, №1. – С.5–13
- [2] Л.А. Компаниец, Т.В. Якубайлик, Л.В. Гаврилова, К.Ю. Гуревич. *Модели экмановского типа в задачах гидродинамики.* – Новосибирск: Наука, 2007. – 156с.
- [3] Л.А. Компаниец, Ю.Б. Гульденбальк. *Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Ч.1 : сборник трудов Международной конференции.* – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2009. с.249-251

ПРОГРАММНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО КУРСУ "ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПРИКЛАДНОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ". ПРОЕКТИРОВАНИЕ GUI и РАБОТЫ С БАЗОЙ ДАННЫХ

Н.В. Гузова

Сибирский федеральный университет, Институт математики

Научный руководитель — ст. преподаватель В.И. Барков

Так как на сегодняшний день использование информационных технологий и Интернет становится важной составляющей обучения, было предложено автоматизировать процесс создания проектов студентами. Данная работа посвящена проектированию системы планирования и управления проектами, ориентированной на работу со студенческими группами. В частности, внимание уделено графическому интерфейсу пользователя (GUI) и работе с базой данных.

Для того чтобы распределенные территориально участники проекта могли эффективно взаимодействовать, научный руководитель осуществлять своевременный контроль, а заказчики и сотрудники кафедры следить за ходом процесса, возникла необходимость создания сетевого приложения.

Программный продукт был рассмотрен как сложная техническая система со следующими требованиями: целенаправленность, целостность и членимость, иерархичность, многоаспектность, развитие [4].

В качестве архитектуры приложения была использована трехуровневая клиент-серверная модель с "тонким" клиентом (см. Рис.1), позволяющая обеспечить гибкость, безопасность, надежность и расширяемость.



Рис. 1: Трехуровневая модель клиент-сервер

Две главные задачи сервера приложений - это изоляция подключений к базе данных и обеспечение централизованного хранилища для деловой логики. Интерфейс пользователя имеет дело только с отображением и вводом данных, а ядро базы данных занимается только проблемами базы данных [2], [3].

Для независимой параллельной разработки приложения двумя разработчиками была предложена следующая структура модулей(см. Рис. 2). Где один из блоков — клиентская часть и связь с базой данных (класс SqlModule), второй — сервер приложений и передача данных по сети между клиентом и сервером (класс TcpClient).

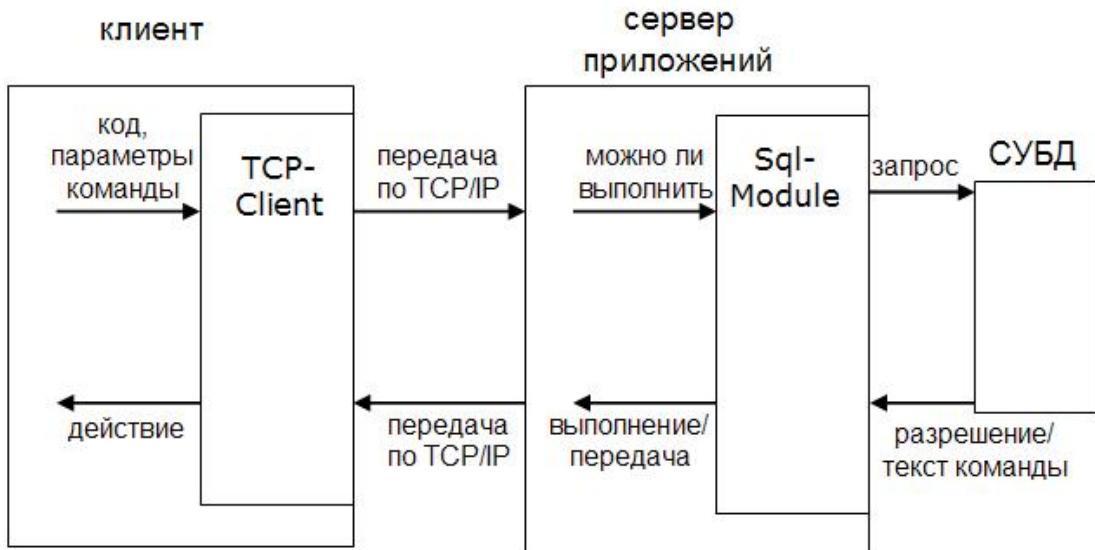


Рис. 2: Структура приложения

На Рис. 2 показано, что клиентская часть посылает код команды и ее параметры серверу приложений по сети, затем сервер передает код команды классу SqlModule, который производит проверку прав доступа на данное действие. Если пользователь имеет соответствующие права, команда исполняется (относящаяся к данным — в базе, к бизнес-логике — на сервере приложений), клиентскому приложению возвращается результат.

Среди пользователей приложения можно выделить такие группы как студенты, руководители проектов, заказчики, преподаватели с кафедры и т.д., каждой из которых предоставлены определенные привилегии на доступ к данным. Например, студент не должен иметь возможности изменять или удалять задания по своему проекту, менять сроки сдачи и т.д. При этом администратор приложения должен обладать инструментами для представления или отмены привилегий для конкретного пользователя. Таким образом, становится важным создание гибкой системы санкционирования доступа [1]. Как следствие, возникает необходимость хранения информации о правах доступа пользователей в базе данных.

После рассмотрения базы данных также как системы были выявлены следующие ее составляющие:

- Метаданные

- описание БД
- права доступа
- описание команд серверу
- меню клиента
- настройки клиента

- Данные

- об основных сущностях (пользователи, проекты, задания и т.д.)
- о их взаимосвязях

Хранящиеся в базе данных сведения о настройках и конфигурации графического интерфейса пользователя позволяют гибко изменять внешний вид приложения, а также осуществлять отображение с учетом прав доступа.

Кроме того, подход с использованием метаданных позволяет обеспечить *гибкость администрирования БД*, изменения и добавления новой функциональности, так как ряд команд прописан в базе и для их модификации разработчику нужно лишь добавить или изменить запись в таблице, без необходимости исправления исходного текста приложения. Следовательно, также поддерживается эволюционное *развитие* и *расширяемость*. Кроме того, становится возможным разграничение прав доступа до уровня столбца и записи к таблицам в базе данных, и, что является более общим, до уровня команд к серверу. Как следствие можно отметить высокую *безопасность* такого решения. Также наличие метаданных позволяет обеспечить независимость от конкретной СУБД и организовать более удобную работу пользователей и администратора приложения.

Список литературы

- [1] Борри Х. *Firebird: руководство разработчика баз данных*: Пер. с англ. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 1104с.: ил.
- [2] Коржов В. *Многоуровневые системы клиент-сервер*. // <http://www.osp.ru/nets/1997/06/142618>
- [3] Орлик С. *Многоуровневые модели в архитектуре клиент-сервер*. // <http://ods.com.ua/win/rus/db/kbd97/22.htm>
- [4] Технологии разработки программного обеспечения: Учебник/ С. Орлов. – СПб.: Питер, 2002. – 464 с.: ил.

ПРИМЕНЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА В ИССЛЕДОВАНИИ АДАПТАЦИИ БАНКОВСКОЙ СИСТЕМЫ РФ К ЭКОНОМИЧЕСКОМУ КРИЗИСУ 2007-2008ГГ. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ОБЛАКА ДАННЫХ

А.Н. Красненко

*Сибирский федеральный университет, Институт математики
Научный руководитель—к.т.н. Л.И. Покидышева*

Работа посвящена анализу динамики корреляций и дисперсий данных российской банковской системы в период экономического кризиса 2007-2008гг. Доказывается эффективность метода корреляционной адаптометрии и в данной области. Для наглядного представления эффекта группового стресса проводится визуализация облака данных с помощью метода главных компонент.

В настоящее время в период разразившегося мирового финансового кризиса многие ученые-экономисты исследуют причины его возникновения, а главное возможные пути выхода из сложившейся ситуации. Эти исследования основываются на изучении состояния банковской системы, динамики различных экономических показателей всех отраслей экономики и др.

В работе проводится анализ динамики развития банковской системы РФ в периоды кризиса с помощью метода корреляционной адаптометрии. Долгое время этот метод применялся к живым объектам, основная цель нашего исследования - доказать, что динамика корреляций может служить индикатором экономического кризиса, т.е. подтвердить применимость метода корреляционной адаптометрии и в экономической области.

Метод основан на проявлении эффекта группового стресса, который был открыт красноярскими учеными - Горбанем А.Н. и Смирновой Е.В. Главными инструментами метода корреляционной адаптометрии являются корреляции и дисперсии данных, анализ которых позволяет диагностировать состояние системы объектов в целом[1].

Согласно предложенному методу, когда система объектов находится под давлением неблагоприятных факторов, взаимосвязь между данными увеличивается, одновременно с увеличением дисперсии [2]. После того как кризис достигает своего пика, система может развиваться в двух направлениях:

1. либо адаптируется к новым условиям и уже функционирует на более высоком уровне адаптации, при этом наблюдается уменьшение корреляций и дисперсии данных.

- либо не может приспособиться к отрицательному воздействию давящего фактора и переходит в стадию дезадаптации, близкую к разрушению системы (отмечается уменьшение корреляций, однако дисперсия продолжает расти).

Важным свойством метода корреляционной адаптометрии является тот факт, что наблюдаемый эффект зависит от выбора системы координат. Индикаторы уровня скоррелированности данных неинвариантны относительно преобразования координат. Так, например, в пространстве главных компонент коэффициенты корреляции между параметрами объектов зануляются, поэтому увидеть проявление эффекта невозможно. Тем не менее, многие исследователи наблюдают эффект без особого подбора системы координат. Что это значит? Можно предположить, что эффект может быть настолько сильным, что почти невероятно произвольным образом выбрать систему координат, где эффект исчезнет. Но с другой стороны, выбор показателей объектов не может быть случайным, отбор системы признаков должен определяться исследователем исходя из здравого смысла, понимания предметной области.

Для исследования были взяты 15 показателей из отчета о прибылях и убытках для каждого из 23 коммерческих банков в период с 2005 г. по 2009 г. Данные были взяты на официальном сайте Центрального Банка РФ (www.cbr.ru) и сгруппированы в таблицы вида "объект-признак" (строки-банки, столбцы - признаки). Получилось 20 таблиц, каждая соответствуетциальному кварталу выбранного периода. Для каждой из полученных таблиц была построена корреляционная матрица, характеризующая зависимость между банками, а также подсчитан вес корреляционного графа G и дисперсия банков D по формулам:

$$G = \sum_{j < i, |r_{ij}| > \alpha} |r_{ij}|,$$

где r_{ij} - коэффициент корреляции Пирсона между i -м и j -м банком.

Пороговое значение α определяется из соотношения:

$$\alpha = \sigma_r + \langle r \rangle,$$

где $\langle r \rangle$ - средний коэффициент корреляции, посчитанный по корреляционным матрицам за все кварталы в совокупности, σ_r - среднеквадратичное отклонение всех коэффициентов корреляции.

Для наших реальных данных $\alpha = 0,8243$.

$$D = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2,$$

где X_i - вектор признаков i -го банка, m - количество точек облака,
 $\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i$ - вектор математического ожидания признаков.

Были построены графики функции $G(t)$ и $D(t)$, где t - номер квартала(рис. 1).

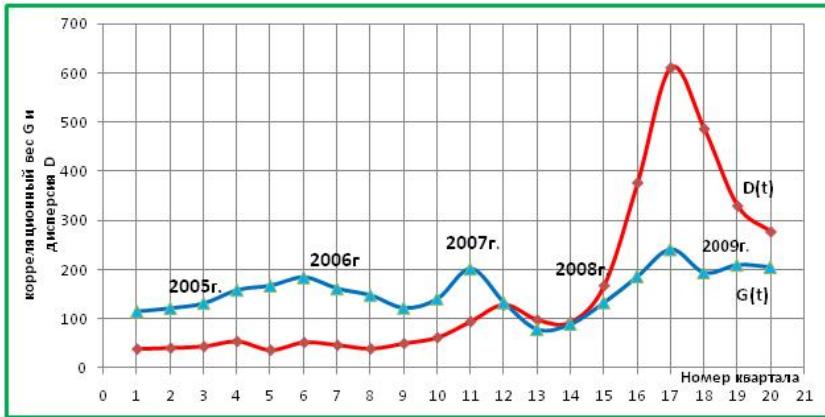


Рис. 1: График динамики веса корреляционного графа G и дисперсии D в период 2005-2009 гг.

На рис.1 выделяются периоды, соответствующие кризисам 2007 и 2008 гг., когда увеличиваются одновременно корреляции и дисперсии данных. Считаем необходимым рассмотреть отмеченные периоды для интерпретации поведения банковской системы в период экономического кризиса (2007-2009 гг.).

Из графика видно, что, начиная с I квартала 2007г. по III квартал этого же года, значение веса корреляционного графа G и дисперсии D растет. Можно предположить, что система испытывает все большее и большее напряжение, банковская система находится в состоянии "стресса", пытается адаптироваться к неблагоприятным внешним воздействиям. Достигая пика напряжения в III квартале 2007г. на интервале III - IV квартала этого же года вес корреляционного графа G уменьшается, а дисперсия D по-прежнему интенсивно растет. Исходя из метода корреляционной адаптометрии, можно заключить, что это тревожные симптомы, которые говорят о том, что система перешла в третью стадию дизадаптации.

При сопоставлении экономической ситуации в мире с полученными данными, оказалось, что метод достаточно точно описал состояние системы. Так, например, действительно в первых трех кварталах 2007г. складывается проблемная ситуация в российской банковской системе с получением дешевого внешнего финансирования. Начинает нарастать напряженность с финансированием банками реального сектора экономики.

Одновременный рост корреляций и дисперсии наблюдается и в период с II квартала 2008 г. по I квартал 2009 г., когда разразился мировой финансо-

вый кризис, повлекший за собой экономический кризис в России. Так же на рисунке видно, что пик кризиса (пик напряженности в банковской системе) приходится на I квартал 2009 г., что соответствует действительности.

Графики функции также позволяют оценить нынешнюю тенденцию развития банковской системы РФ как улучшение экономической обстановки, постепенно банки адаптируются к сложившимся отрицательным внешним факторам. Такое оздоровление на графиках отразилось уменьшением веса корреляционного графа и дисперсии данных начиная с II квартала 2009г. И действительно, в настоящее время российские банки возобновили выдачу кредитов, что является главным источником прибыли кредитных организаций.

Безусловно, возникает вопрос, а насколько описанное графиками состояние в экономике соответствует действительности? Данные взлеты и падения корреляций - истинные колебания экономики банков или же артефакт?

Полученные графики функций $G(t)$ и $D(t)$ были сопоставлены с динамикой среднеквартальных значений индексов российских фондовых бирж: РТС и ММВБ, с курсами валют доллара и евро, с результатами применения данного метода к 30 крупнейшим компаниям Великобритании. Оказалось, что взлету(падению) индикатора скоррелированности и дисперсии соответствует падение(рост) биржевого индекса и рост(падение) курса валют, кроме того развитие кризиса в банковской системе РФ повторяет основные мировые тенденции. Все это позволяет сделать вывод о том, что динамика корреляций может служить индикатором экономического кризиса и в российской банковской системе тоже.

Корреляционные связи между банками могут быть продемонстрированы наглядно в виде корреляционных графов[2], вершинами которых являются банки, а ребрами связаны те узлы графа, для которых выполняется следующее условие:

$$r_{ij} > \sigma_r + \langle r \rangle .$$

На рис. 2-4 видно, что в период стабильности (I квартал 2008г.) связей между банками не так много, однако в пик кризиса (I квартал 2009г.) корреляционный граф становится сильно связанным.

В работе также была реализована визуализация облака данных с помощью метода главных компонент.

Наглядное представление позволяет увидеть компактные формы облака данных в благоприятный период для банковской системы(рис.5), а также всевозможные деформации облака:растяжение, расположение в нескольких направлениях - в периоды кризиса(рис.6).

Главные компоненты были найдены как собственные вектора ковариа-

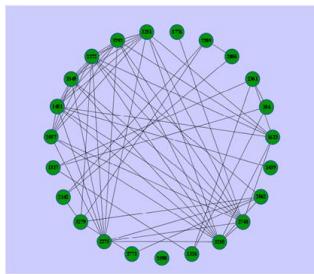


Рис. 2: Корреляционный график в I квартале 2008 года.

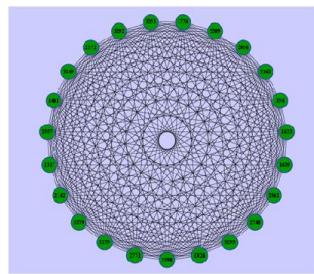


Рис. 3: Корреляционный график в I квартале 2009 года, в пик кризиса.

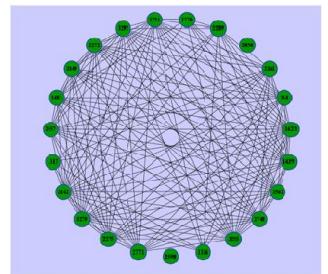


Рис. 4: Корреляционный график во II квартале 2009 года.

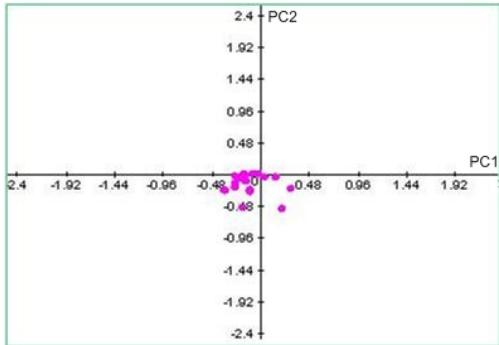


Рис. 5: Облако данных в IV квартале 2006 года, период стабильности.

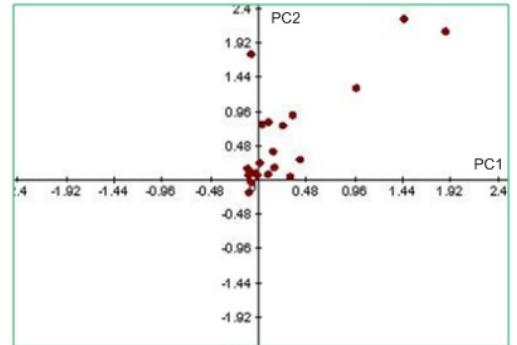


Рис. 6: Облако данных в IV квартале 2007 года, пик кризиса 2007 года.

ционной матрицы данных, которая была подсчитана по всем данным в совокупности за весь исследуемый период. Таким образом, сначала была подсчитана некоторая подложка, на которую затем проецировались данные по каждому кварталу в отдельности.

Исследование динамики развития банковской системы с помощью метода корреляционной адаптометрии подтвердило эффективность метода и в экономической области. Исследование продемонстрировало, что корреляции и дисперсии банков имеют диагностическую силу и могут ясно показать хронологию кризиса. Метод также хорош тем, что объективно описывает состояние системы, используя только математический аппарат, не опираясь на субъективные мнения экспертов. Подобные исследования состояния системы экономических объектов могут стать хорошим опорным материалом для ученых - экономистов при принятии решения по улучшению экономической обстановки, а также для наблюдения реакции системы на предпринятые действия, что, безусловно, актуально в настоящее время нестабильности в экономике.

Список литературы

- [1] А.Н. Горбань, В.Т. Манчук, Е.В. Петушкова. *Динамика корреляций ме-*

ду физиологическими параметрами при адаптации и эколого-эволюционный принцип полифакториальности, Проблемы экологического мониторинга и моделирования экосистем, Л.: Гидрометеоиздат, (1987), Т.10. 187-198.

[2] A.N. Gorban, E.V. Smirnova, T.A. Tyukina. *Correlations, Risk and Crisis: From Physiology to Finance, Physica A, e-print, arXiv:0905.0129v2 [physics.bio-ph]*, (2009). 40 pp.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Е.В. Дементьева

Сибирский федеральный университет, Институт математики

Научный руководитель — к.ф.-м.н. Е.Д. Карепова

В настоящей работе проведено исследование эффективности нескольких параллельных реализаций алгоритма численного решения начальнокраевой задачи для уравнений мелкой воды, выполненных с помощью библиотеки MPI для языка Си.

1. Моделирование поверхностных волн в водоемах методом конечных элементов.

Численное моделирование поверхностных волн в больших акваториях проводилось с учетом сферичности Земли и ускорения Кориолиса на основе уравнений мелкой воды [1]. В [2] для этой задачи построен метод конечных элементов (МКЭ), и дифференциальная задача сведена к векторно-матричной форме. Полученная система линейных алгебраических уравнений решается итерационным методом Якоби, который обладает хорошим параллелизмом, а диагональное преобладание для его сходимости обеспечивается выбором шага по времени [3].

2. Параллельный алгоритм.

Используя явный параллелизм по данным, исходную расчетную область можно разбить на несколько частично перекрывающихся подобластей, в каждой из которых расчеты выполняются независимо в рамках итерации Якоби. После каждой итерации необходимо проводить согласование данных в перекрытиях. Имеет место, по крайней мере, два варианта разбиения — с теневыми гранями и без них [3]. Декомпозиция без теневых граней более экономична по памяти, проста в программировании, однако предполагает дополнительные арифметические операции на каждой итерации

Якоби. Очевидно ее достоинство для неструктурированных сеток.

При использовании библиотеки MPI возможно два принципиально разных способа организации обменов — с использованием блокирующих или неблокирующих функций передачи данных [3]. В работе [3] оценено время, необходимое для обменов в обоих случаях, а также выполнены теоретические оценки возможного ускорения каждого из параллельных алгоритмов.

3. Вычислительный эксперимент.

Для численного исследования ускорения параллельного алгоритма рассмотрим модельную задачу для «квадрата» на сфере с твердыми границами [2]. В расчетной области построена равномерная квадратная сетка 801×801 точек с соответствующей согласованной триангуляцией. В вычислительных экспериментах было сделано 1000 шагов по времени.

Расчеты были проведены на трех высокопроизводительных ВС. Во-первых, вычисления выполнялись на 99-ядерном кластере ИВМ СО РАН, отличительной чертой которого, является его гетерогенная архитектура (кластер содержит однопроцессорные одноядерные, однопроцессорные двухядерные и двухпроцессорные двухядерные вычислительные узлы, сеть передачи данных — GigaEthernet). Вторым кластером является кластер ТГУ СКИФ Cyberia, который содержит 283 двухпроцессорных двухядерных вычислительных узла, объединенных высокопроизводительной сетью передачи данных InfiniBand. Наконец, эксперименты были частично повторены на высокопроизводительном вычислительном комплексе НГУ (HP-НГУ), на базе кластера из 64 восьмиядерных вычислительных узлов, основанных на блэйд-серверах Hewlett-Packard BL460c, объединенных сетью InfiniBand. Кластеры SKIF Cyberia и HP-кластер ИВЦ НГУ отличаются, в интересующем нас плане, количеством ядер приходящихся на узел.

Исследования зависимости ускорения проводились вплоть до 32 процессов, где на рассматриваемой сетке алгоритм хорошо масштабируем. Численные эксперименты показали несомненное преимущество неблокирующих двухточечных обменов над блокирующими и несущественное различие между способами декомпозиции расчетной области.

На рис. 1 представлена зависимость ускорения вычислений от количества используемых процессов, полученных на кластерах ИВМ СО РАН и SKIF Cyberia. Для сравнения представлен график потенциального ускорения согласно теоретической оценке (см. [3]). В экспериментах на кластере ИВМ СО РАН общий тренд ускорения совпадает с теоретическими оценками, однако его рост носит сильно неустойчивый характер. Расчеты, проведенные на кластере СКИФ Cyberia, показывают классическую картину ускорения, подтверждающую линейный характер его роста с увеличением

количества процессоров с эффективностью около единицы. Эксперименты на НР-НГУ подтверждают эти результаты. Таким образом, неустойчивый характер ускорения в расчетах, проведенных на кластере ИВМ СО РАН, объясняется, скорее всего, настройками и особенностями его программного обеспечения.

Поскольку время выполнения программы складывается из времени вычислений, времени коммуникаций и дополнительного времени для операций, связанных с распределенностью данных, то были проведены серии расчетов, в которых названные составляющие были измерены отдельно для случая декомпозиции без перекрытий и неблокирующего режима двухточечных обменов (рис 2). Время выполнения вычислений (рис. 2 вверху) для гомогенных архитектур совпадает с теоретическими оценками. На кластере ИВМ СО РАН время вычислений уменьшается немонотонно.

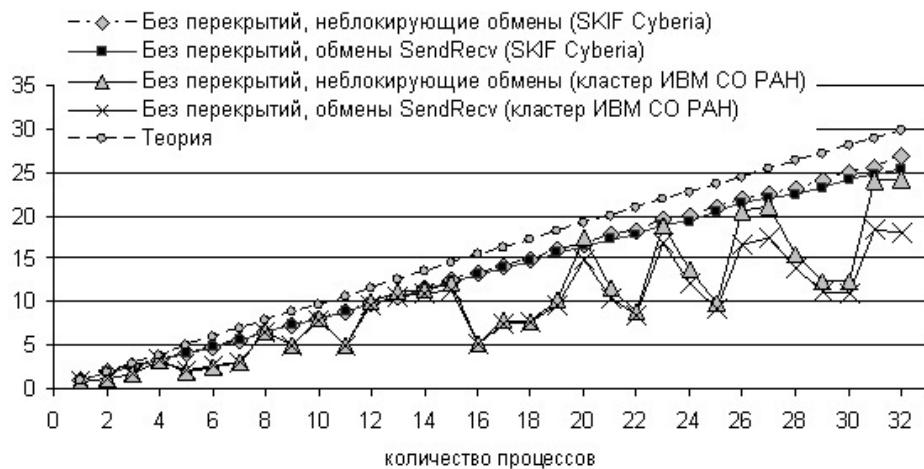


Рис. 1: Зависимость ускорения вычислений от количества доступных процессоров. Сетка 801×801

Время выполнения обменов в неблокирующем режиме не зависит от количества процессов, участвующих в расчетах. Для кластера с неоднородной архитектурой наблюдается ожидаемое немонотонное поведение исследуемой величины. Однако немонотонное поведение наблюдается и в случае расчетов для гомогенных архитектур. Исследование времени выполнения обменов показало следующее:

1. время обменов минимально и не зависит от количества процессов, участвующих в обменах, если загружены все ядра на узле по одному процессу на ядро;
2. при существовании в расчетах узлов, не полностью загруженных, время обменов тем больше, чем больше количество простаивающих ядер;
3. время, затраченное на обмены, уменьшается с ростом количества задействованных процессоров (т.е. уменьшением времени вычислений).

На рис. 2 представлены зависимости времени выполнения неблокирующих обменов (НР-НГУ), от количества используемых процессов для двух способов загрузки узлов:

1. используется лишь одно ядро на каждом расчетном узле;
2. загружено максимально возможное число ядер на используемых узлах.

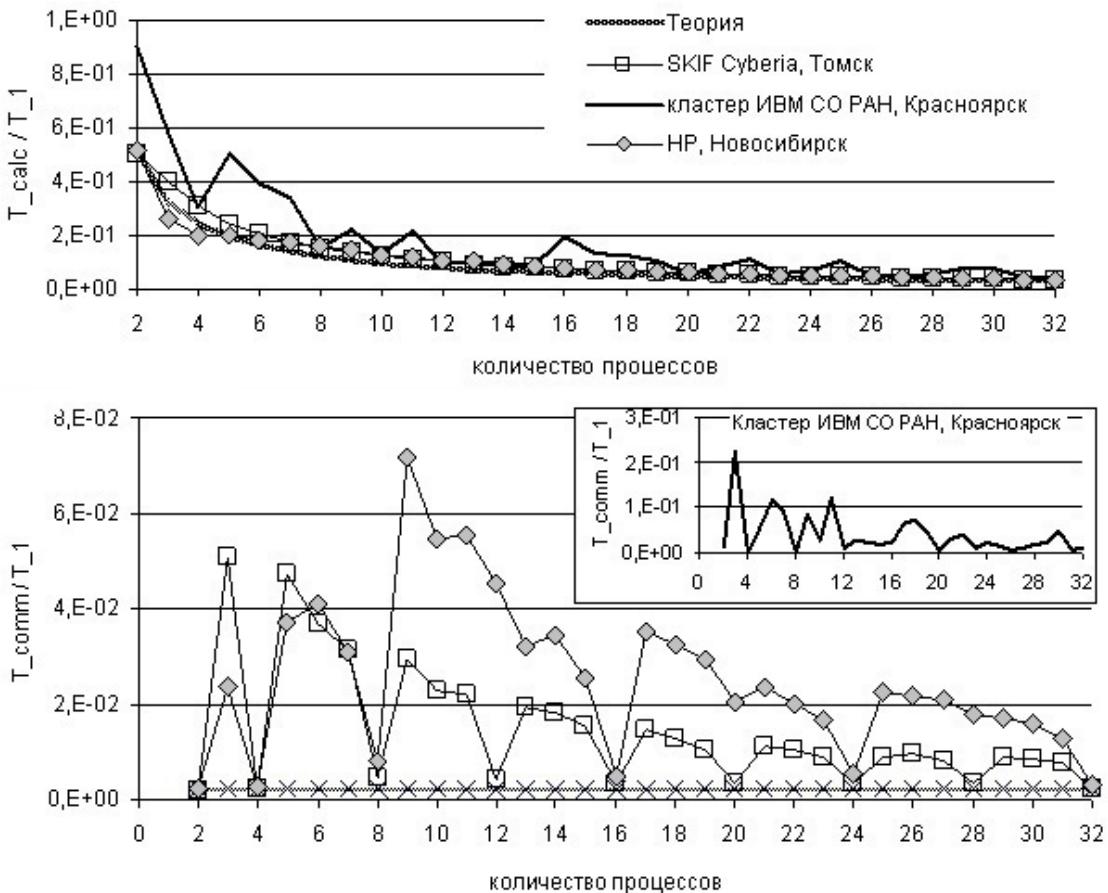


Рис. 2: Исследование времени счета и времени коммуникаций. Неблокирующие обмены, декомпозиция без перекрытий

Данное исследование показало преимущество первого способа загрузки вычислительных узлов, когда время, потраченное на обмены, соответствует теоретическим оценкам. В этом случае, ускорение вычислений возрастает линейно и значительно превышает ускорение, полученное при загрузке узлов вторым способом. Недостатком первого способа, однако, является неэффективное использование ресурсов кластера, поскольку незадействованные ядра в узлах простаивают в ожидании окончания вычислений.

Таким образом, наилучшие результаты по времени обменов мы получаем, когда данные распределены равномерно в каждом узле.

Авторы благодарят коллектив МВЦ ТГУ и ИВЦ НГУ, профессора А.В. Старченко и Д.Л. Чубарова за предоставленную возможность проведения серии вычислительных экспериментов на кластере СКИФ Cyberia и кластере ИВЦ НГУ.

Работа поддержана грантом РФФИ № 08-01-00621.

Список литературы

- [1] Agoshkov V.I. *Inverse problems of the mathematical theory of tides: boundary-function problem* // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2005. – Vol. 20, № 1. – P. 1-18.
- [2] Kamenshchikov, L.P. *Simulation of surface waves in basins by the finite element method* / Kamenshchikov L.P., Karepova E.D., Shaidurov V.V. // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2006. – Vol. 21, №4. – Pp. 305-320.
- [3] Е.Д. Карепова, В.В. Шайдуров. *Параллельная реализация метода конечных элементов для начально-краевой задачи мелкой воды* // Вычислительные технологии. – 2009. – Том 14, №6. – С. 45-57.

РАЗБИЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО СИГНАЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Д.Б. Демидов

Сибирский федеральный университет, Институт математики

Научный руководитель — ст. пр. В.В. Крафт

В статье рассказывается о методе разбиения непрерывного сигнала на фрагменты, пригодных для дальнейшего анализа и классификации. Для этих целей было применено вейвлет-преобразование.

В настоящее время, при разработке современных высоко технологичных устройств, большое внимание уделяется различным способам взаимодействия человека с этими устройствами, интерфейсами. Одним из актуальных ныне способов взаимодействия является голосовой интерфейс, т.е. такое взаимодействие, при котором человек отдает команды устройству простым произнесением последних. Реализовать такой интерфейс помогают системы распознавания речи. Сейчас такие системы доступны только для англоязычного населения и лишь единицы способны корректно разбивать русскую речь, из них ни одна не разработана в СФУ.

Системы распознавания речи различаются по следующим признакам (см. [2]): зависимость/независимость от диктора; необходимость в паузах

между словами; степени детализации при создании эталонов. При этом, перспективными являются дикторонезависимые системы распознавания слитной речи, но такие системы требуют большой подготовительной работы над входным сигналом, прежде чем будут запущены алгоритмы распознавания.

К одному из таких этапов подготовки относится разбиение непрерывного звукового потока на отдельные фрагменты, которые в дальнейшем и будут анализироваться.

Вещественный сигнал f , содержащий одну единственную частоту, изменяющуюся во времени, будем записывать как амплитуду a , модулированную с помощью зависящей от времени фазы ϕ :

$$f(t) = a(t) \cos \phi(t),$$

где $a(t) \geq 0$ — амплитуда $f(t)$, а $\omega(t) = \phi'(t) \geq 0$ — мгновенной частотой.

Голосовая речь может быть представлены в виде суммы синусоидальных сигналов:

$$f(t) = \sum_{k=1}^K f_k(t) = \sum_{k=1}^K a_k(t) \cos \phi_k(t). \quad (1)$$

где $a_k(t)$ и $\phi'_k(t)$ медленно меняются, а K зависит от типа голоса диктора.

Выделение мгновенных частот.

Хребты преобразования Фурье с окном: Преобразование Фурье с окном вычисляется с помощью симметричного окна $g(t) = g(-t)$, носитель которого равняется $[-1/2, 1/2]$. Преобразование Фурье \hat{g} — вещественная симметричная функция и $|\hat{g}(\omega)| \leq \hat{g}(0)$ при всех $\omega \in \mathbb{R}$. Максимум $\hat{g}(0) = \int_{-1/2}^{1/2} g(t) dt$ имеет порядок 1. Окно g нормируется так, что $\|g\| = 1$. Для фиксированного масштаба s функция $g_s(t) = s^{-1/2}g(t/s)$ имеет носитель размера s и единичную норму. Соответствующие атомы Фурье с окном имеют вид

$$g_{s,u,\xi}(t) = g_s(t-u)e^{i\xi t},$$

и преобразование Фурье с окном определяется как

$$Sf(u, \xi) = \langle f, g_{s,u,\xi} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g_s(t-u)e^{-i\xi t} dt. \quad (2)$$

Следующая теорема, доказанная в [1], связывает $Sf(u, \xi)$ с мгновенной частотой f .

Теорема 1. Пусть $f(t) = a(t) \cos \phi(t)$. Если $\xi \geq 0$, то

$$\langle f, g_{s,u,\xi} \rangle = \frac{\sqrt{s}}{2} a(u) \exp(i[\phi(u) - \xi u]) \left(\hat{g}(s[\xi - \phi'(u)]) + \varepsilon(u, \xi) \right). \quad (3)$$

Корректирующий член удовлетворяет неравенству

$$|\varepsilon(u, \xi)| \leq \varepsilon_{a,1} + \varepsilon_{a,2} + \varepsilon_{\phi,2} + \sup_{|\omega| \geq s\phi'(u)} |\hat{g}(\omega)|,$$

где

$$\varepsilon_{a,1} \leq \frac{s|a'(u)|}{|a(u)|}, \quad \varepsilon_{a,2} \leq \sup_{|t-u| \leq s/2} \frac{s^2|a''(t)|}{|a(u)|}, \quad (4)$$

и если $s|a'(u)||a(u)|^{-1} \leq 1$, то

$$\varepsilon_{\phi,2} \leq \sup_{|t-u| \leq s/2} s^2 |\phi''(t)|. \quad (5)$$

Если $\xi = \phi'(u)$, то

$$\varepsilon_{a,1} = \frac{s|a'(u)|}{|a(u)|} |\hat{g}'(2s\phi'(u))|. \quad (6)$$

Выражения (4), (5) показывают, что три корректирующих члена $\varepsilon_{a,1}$, $\varepsilon_{a,2}$ и $\varepsilon_{\phi,2}$ малы, если $a(t)$ и $\phi'(t)$ относительно мало меняются на отрезках, равных носителю окна g_s . Пусть $\Delta\omega$ — ширина диапазона \hat{g} , определенная неравенствами $|\hat{g}(\omega)| \ll 1$ при $|\omega| \geq \Delta\omega$. Член $\sup_{|\omega| \geq s|\phi'(u)|} |\hat{g}(\omega)|$ в выражении для $\varepsilon(u, \xi)$ пренебрежимо мал, если $\phi'(u) \geq \Delta\omega/s$.

Предположим, что $a(t)$ и $\phi'(t)$ мало меняются на отрезках размера s и $\phi'(t) \geq \Delta\omega/s$, так что корректирующим членом $\varepsilon(u, \xi)$ в (3) можно пренебречь. Так как $|\hat{g}(\omega)|$ максимален при $\omega = 0$, то (3) показывает, что для каждого u спектrogramma $|Sf(u, \xi)|^2$ максимальна при $\xi(u) = \phi'(t)$. Соответствующие частотно-временные точки $(u, \xi(u))$ называются *хребтами*. В точках хребта (3) принимает вид

$$Sf(u, \xi) = \frac{\sqrt{s}}{2} a(u) \exp(i[\phi(u) - \xi u]) (\hat{g}(0) + \varepsilon(u, \xi)). \quad (7)$$

Частота хребта дает мгновенную частоту $\xi(u) = \phi'(u)$, при этом амплитуда вычисляется по формуле

$$a(u) = \frac{2|Sf(u, \xi(u))|}{\sqrt{s}|\hat{g}(0)|}. \quad (8)$$

Пусть $\Phi_S(u, \xi)$ — комплексная фаза $Sf(u, \xi)$. Если мы пренебрегаем корректирующим членом, то из (7) следует, что точки хребта являются также точками стационарной фазы

$$\frac{\partial \Phi_S(u, \xi)}{\partial u} = \phi'(u) - \xi = 0$$

Проверка стационарности фазы более точно локализует расположение хребтов.

Вейвлет-хребты: Атомы Фурье с окном имеют фиксированный масштаб и поэтому не могут следовать за быстро меняющейся мгновенной частотой сигнала.

Возьмем вейвлет, полученный в результате умножения окна g на синусоидальную волну:

$$\psi(t) = g(t) \exp(i\eta t).$$

Окно g — тоже окно, что определено выше: симметричное, нормированное и с шириной частотного диапазона $\Delta\omega$. Если $\eta > \Delta\omega$, то $\forall \omega < 0$, $\hat{\psi}(\omega) = \hat{g}(\omega - \eta) \ll 1$.

Растянутые и сдвинутые вейвлеты могут быть записаны как

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) = g_{s,u,\xi}(t) \exp(-i\xi u),$$

где $\xi = \eta/s$ и $g_{s,u,\xi}(t) = \sqrt{s}g\left(\frac{t-u}{s}\right) \exp(i\xi t)$. В результате вейвлет-преобразование использует частотно-временные атомы, аналогичные преобразованию Фурье с окном (2), но в этом случае масштаб s изменяется в области \mathbb{R}^+ , так как $\xi = \eta/s$:

$$Wf(u, s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \langle f, g_{s,u,\xi} \rangle \exp(i\xi u).$$

Теорема 1 дает возможность вычислить $\langle f, g_{s,u,\xi} \rangle$ для $f(t) = a(t) \cos \phi(t)$:

$$Wf(u, s) = \frac{\sqrt{s}}{2} a(u) \exp[i\phi(u)] \left(\hat{g}(s[\xi - \phi'(u)]) + \varepsilon(u, \xi) \right). \quad (9)$$

Корректирующий член $\varepsilon(u, \xi)$ пренебрежимо мал, если $a(t)$ и $\phi'(t)$ мало меняются на носителе $\psi_{u,s}$ и если $\phi'(u) \geq \Delta\omega/s$.

Мгновенная частота измеряется по хребтам, определенным с помощью вейвлет-преобразования. Нормированная скейлограмма, определенная как

$$\frac{\xi}{\eta} P_W f(u, \xi) = \frac{|Wf(u, s)|^2}{s} \quad \text{для } \xi = \eta/s,$$

вычисляется с помощью (9):

$$\frac{\xi}{\eta} P_W f(u, \xi) = \frac{1}{4} a^2(u) \left| \hat{g}\left(\eta\left[1 - \frac{\phi'(u)}{\xi}\right]\right) + \varepsilon(u, \xi) \right|^2.$$

Так как $|\hat{g}(\omega)|$ максимален при $\omega = 0$ и если мы пренебрегаем $\varepsilon(u, \xi)$, то это выражение показывает, что скейлограмма максимальна при $\eta/s(u) =$

$\xi(u) = \phi'(u)$. Соответствующие точки $(u, \xi(u))$ называются *вейвлет-хребтами*. Аналитическая амплитуда дается формулой

$$a(u) = \frac{2\sqrt{\eta^{-1}\xi P_W f(u, \xi)}}{|\hat{g}(0)|}.$$

Комплексная фаза $Wf(u, \xi)$ в (9) есть $\Phi_W(u, \xi) = \phi(u)$. В точках хребта

$$\frac{\partial \Phi_W(u, \xi)}{\partial u} = \phi'(u) = \xi.$$

Когда $\xi = \phi'(u)$, членом первого порядка $\varepsilon_{a,1}$, вычисленным в (6), можно пренебречь. Поэтому корректирующий член определяется $\varepsilon_{a,2}$ и $\varepsilon_{\phi,2}$. Чтобы упростить их выражение, мы приблизим $\sup a''$ и $\sup \phi''$ в окрестности u их значениями в этой точке. Так как $s = \eta/\xi = \eta/\phi'(u)$, то из (4) и (5) следует, что эти члены второго порядка становятся пренебрежимо малыми, если

$$\frac{\eta^2}{|\phi'(u)|^2} \frac{|a''(u)|}{|a(u)|} \ll 1 \quad \text{и} \quad \eta^2 \frac{|\phi''(u)|}{|\phi'(u)|^2} \ll 1. \quad (10)$$

Присутствие ϕ' в знаменателе доказывает, что a' и ϕ' должны мало меняться при малых ϕ' , но могут меняться очень быстро при больших мгновенных частотах.

Многоспектральная оценка: Когда сигнал содержит несколько спектральных линий, частоты которых достаточно разделены, преобразование Фурье с окном и вейвлет-преобразование выделяют каждую из этих компонент. Хребты определяют изменение во времени каждой спектральной компоненты.

Вернемся к нашей модели голосовой речи (1). Так как преобразование Фурье с окном линейно, мы применяем (3) к каждой спектральной компоненте и пренебрегаем корректирующими членами:

$$Sf(u, \xi) = \sum_{k=1}^K \frac{\sqrt{s}}{2} a_k(u) \hat{g}(s[\xi - \phi'_k(u)]) \exp(i[\phi'_k(u) - \xi u]). \quad (11)$$

При этом, любые две спектральные компоненты различаются, если для всех u

$$\hat{g}(s|\phi'_i(u) - \phi'_j(u)|) \ll 1 \quad \text{для} \quad 1 \leq i < j \leq K, \quad (12)$$

это означает, что разность между частотами больше, чем ширина диапазона $\hat{g}(s\omega)$:

$$|\phi'_i(u) - \phi'_j(u)| \geq \frac{\Delta\omega}{s} \quad \text{для} \quad 1 \leq i < j \leq K. \quad (13)$$

В этом случае, если $\xi = \phi'_l(u)$, $1 \leq l \leq K$, слагаемыми с индексами $k \neq l$, $1 \leq k \leq K$, в (11) можно пренебречь, и l слагаемое порождает точки хребта, по которым, используя (8), мы можем восстановить $\phi'_l(u)$ и $a_l(u)$. Этот результат имеет силу до тех пор, пока расстояние между любыми двумя мгновенными частотами удовлетворяет (13).

Для оценки вейвлет-хребтов, как и в (12), мы убеждаемся, что мгновенная частота ϕ'_j не интерферирует с хребтами ϕ'_i , $1 \leq i < j \leq K$, если растянутое окно имеет достаточное спектральное разрешение при масштабе хребта $s = \eta/\xi = \eta/\phi'_i(u)$:

$$\hat{g}(s|\phi'_i(u) - \phi'_j(u)|) \ll 1 \quad \text{для } 1 \leq i < j \leq K.$$

Так как ширина диапазона $\hat{g}(\omega)$ есть $\Delta\omega$, то это означает, что

$$\frac{|\phi'_i(u) - \phi'_j(u)|}{\phi'_i(u)} \geq \frac{\Delta\omega}{\eta} \quad \text{для } 1 \leq i < j \leq K. \quad (14)$$

При разделении спектральных линий с близкими мгновенными частотами эти условия доказывают, что вейвлет должен иметь малую ширину октавы $\Delta\omega/\eta$. Ширина диапазона $\Delta\omega$ — фиксированная константа, которая имеет порядок 1. Частота η — свободный параметр, величина которого оптимально выбирается между условием разрешения по времени (10) и условиями ширины частотного диапазона (14).

Разбиение голосовой речи: В настоящее время принято считать, что диапазон частот, соответствующий речи человека, находится в рамках от 100 Гц до 6 кГц (см. [3]), причем максимальная мощность звуков речи приходится на частоты ниже 1 кГц, а около 80% от общей мощности — на частоты ниже 500 Гц. Звуков с высокими частотами в речи присутствует мало, но практически вся мощность согласных звуков приходится на частоты выше 1 кГц, поэтому потеря высоких частот может привести к снижению разборчивости речи.

Вейвлет-преобразование $Wf(u, s)$ и полученные с его помощью вейвлет-хребты $s^{-1}|Wf(u, s)|^2$ дают двумерную поверхность. Фиксируя параметр $s = s_0$, решаем равенство

$$\frac{|Wf(u, s_0)|^2}{s_0} = C,$$

где C — положительный параметр чувствительности. Полученные таким образом решения u_i являются точками на временной шкале, где следует разбивать сигнал $f(u)$.

В результате проведенной работы была написана программа на языке C#, реализующая данный алгоритм. На рис. 1–3 приведен пример разбиения слова «третий».

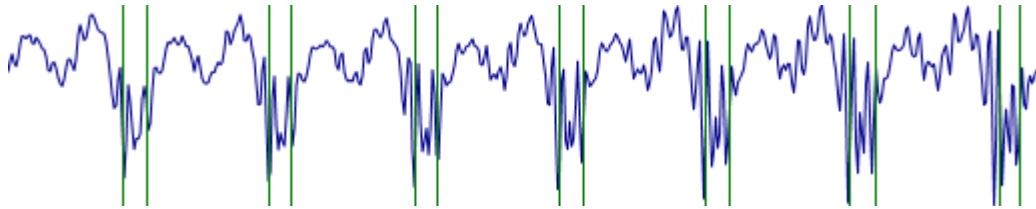


Рис. 1: Фрагмент слова «третий» с отмеченными местами разбиения (вертикальные линии).

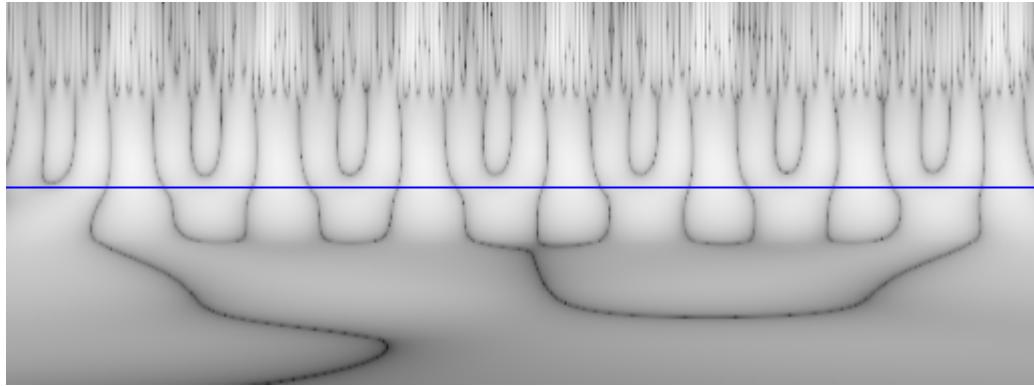


Рис. 2: Скейлограмма, соответствующая фрагменту слова «третий», представленному на рис. 1. Вертикальная ось представляет значения $\log_2 s$, горизонтальная ось представляет значения времени. Темные области указывают на меньшие амплитуды коэффициентов. Горизонтальная синяя линия расположена на отметке $\log_2 s_0$.

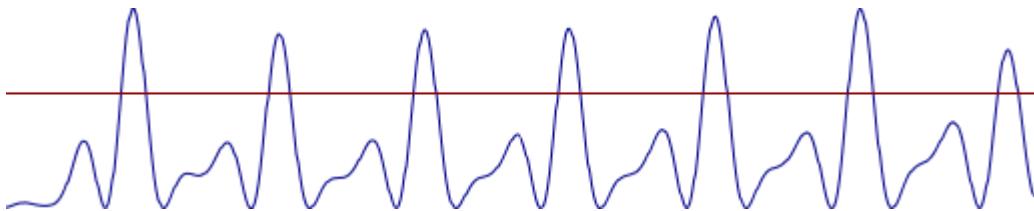


Рис. 3: Сечение скейлограммы при $s = s_0$. Вертикальная ось представляет значения коэффициентов, горизонтальная — время. Горизонтальная прямая соответствует значению коэффициента чувствительности C .

Список литературы

- [1] Малла. С. *Вейвлеты в обработке сигналов : учеб. пособие для студ. вузов / пер. с англ. Я. М. Жилейкина — М.: Мир, 2005. — 671 с., ил.*
- [2] Мазуренко И. Л. *Компьютерные системы распознавания речи. / И. Л. Мазуренко; МГУ им. М. В. Ломоносова. — М., 2001. — 17 с. — Библиогр.: с. 16-17. — Деп. в миннауке № 020105028*
- [3] Синтез и распознавание речи. Современные решения [Электронный ресурс]. — М.: Библиотека Братьев Фроловых. — А. Фролов, Г. Фролов, 2003. — сайт <http://www.frolov-lib.ru/>
- [4] Шитов А. Б. *Разработка численных методов и программ, связанных с применением вейвлет-анализа для моделирования и обработки экспериментальных данных: дис. к. ф.-м. н. / А. Б. Шитов; Ивановский государственный университет. — Иваново, 2001. — 125 с.*

ВЫБОР ТОПОЛОГИИ ЧАСТИЦ В МЕТОДЕ PARTICLE SWARM OPTIMIZATION ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ РАЗЛИЧНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

В.О. Долин

*Сибирский государственный аэрокосмический университет имени
академика М.Ф. Решетнева*

Научный руководитель — ст. пр. С.С. Бежитский

Поиск оптимальных решений занимает все более значимую роль при решении прикладных задач. Для поиска разработано множество поисковых методов, таких как методы нулевого порядка: Метод бисекций, Метод покоординатного спуска, Метод деформируемого многогранника Нелдера-Мида и т.д.; методы первого порядка: Метод наискорейшего спуска, Метод сопряженного градиента Флетчера-Ривса и т.д.; методы второго порядка: Метод Ньютона-Рафсона, Метод Дэвидона-Флетчера-Пауэла и так далее. Так же, все большей популярностью пользуются стохастические алгоритмы, имеющие слабую доказательную базу, но, зачастую, показывающие хорошие результаты при решении прикладных задач.

Все больший научный и практический интерес вызывают эволюционные алгоритмы глобальной оптимизации, имитирующие процессы естественной эволюции и поведения живых организмов в окружающей среде [1, 2,

3]: генетические алгоритмы, эволюционные стратегии, <муравьиные алгоритмы>, <пчелиные алгоритмы>. И относительно недавно разработан смежный метод, обобщающий имитацию интеллектуального совместного поведения субъектов, без отнесения их к какой-либо биологической группе, так называемый particle swarm optimization (PSO) [4].

В методе оптимизации PSO решениями являются частицы. Каждая частица характеризуется: координатами частицы в пространстве поиска, вектором скорости, памятью частицы о наилучшей, по значению целевой функции, позиции, найденной частицей за все время поиска, памятью частицы о наилучшей, по целевой функции, позиции, найденной группой в которую входит частица. Используя эти характеристики, частицы перемещаются, подчиняясь определенным законам, по поисковому пространству, осуществляя поиск точки глобального оптимума целевой функции.

Простота реализации и эффективность данного алгоритма вызывают повышенный практический интерес к PSO, а недостаточная изученность влияния параметров алгоритма требует дополнительных исследований.

Рассмотрим задачу глобальной безусловной минимизации целевой функции:

$$X^0 = \operatorname{argmin} F(X) \quad (1)$$

Множество частиц обозначим $P = P_i, \in [1, N]$, где N - количество частиц. В момент времени $t = 1, 2, 3\dots$ координаты частицы P_i определяются вектором $X_{i,t} = (x_{i,t,1}, x_{i,t,2}, \dots, x_{i,t,n})$, а ее скорость - вектором $V_{i,t} = (v_{i,t,1}, v_{i,t,2}, \dots, v_{i,t,n})$. Начальные координаты и скорости частицы P_i равны $X_{i,0} = X_i^0, V_{i,0} = V_i^0$, соответственно.

Итерации в каноническом методе PSO выполняются по следующей схеме:

$$V_{i,t+1} = w * V_{i,t} + c1 * \phi1 * (P_{ibest} - X_i) + c2 * \phi2 * (P_{gbest} - X_i) \quad (2)$$

$$X_{i,t+1} = X_{i,t} + V_{i,t+1} \quad (3)$$

Здесь как $\phi1$, так и $\phi2$ представляют собой n -мерный вектор псевдослучайных чисел, равномерно распределенных в интервале $[0; 1]$. P_{ibest} - наилучшая по значению целевой функции позиция, найденная частицей за все время поиска. P_{gbest} - наилучшая по целевой функции позиция, найденная группой в которую входит частица. w - параметр инерции скорости, $c1$ и $c2$ - это коэффициенты индивидуальной и групповой сходимости частицы. Параметр w может изменяться динамически по согласно формуле:

$$w = w_{max} - (w_{max} - w_{min}) * iter / iter_{max} \quad (4)$$

где w_{max} - максимальное значение параметра w , w_{min} - минимальное значение параметра w , $iter$ - номер итерации, $iter_{max}$ - максимальное количество

итераций.

Важным параметром в PSO является топология группы частиц, на которые разбивается все частицы. Другими словами топология группы определяет структуру соседства частиц в группе. В данной работе для исследования выбраны такие топологии: <клика>, <клuster> размерности 3 и размерности 4. Топология <клика> является наиболее очевидной структурой соседства, когда каждая частица располагает информацией о лучших решениях, найденных всей группой частиц, в которую она входит. Топология <клустера> - состоит из нескольких топологий <клика> или групп, в каждой группе свой P_{gbest} и частицы из других групп его не <зируют>, для наглядности данную топологию можно представить графически, как изображено на рисунке 1.

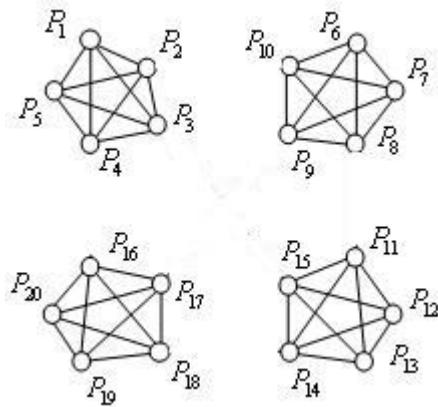


Рисунок 1 - Топология <клустер>

На рисунке 1, общее число частиц равно 20, они разделены на 4 кластера по 5 частиц в кластере. Таким образом для частицы P_1 соседними являются частицы: P_2, P_3, P_4, P_5 .

В ходе проведенных исследований была разработана программная система решения задач глобальной оптимизации методом PSO и проведено тестирование метода на репрезентативном множестве функций, включающем унимодальные и многоэкстремальные масштабируемые функции, с возможностью произвольного сдвига точки экстремума. В перечень функций тестирования включал следующие функции: Сферическая, Повернутая Эллиптическая, Розенброка, Гринвока, Экли, Растригина, Самбреро.

В данной работе исследовалось поведение эффективности алгоритма при различных размерностях целевой функции, значимость топологии группы частиц и необходимое количество вычислений целевой функции.

Стохастичность исследуемого алгоритма предопределила оценку эффективности по усредненным многократным прогонам и трем показателям качества: скорости, надежности, разбросу.

Во всех запусках алгоритма число прогонов равнялось 50, точность по-

иска экстремума равна 0.01, значения параметров алгоритма $c1 = 1.5$ и $c2 = 1.5$. Параметр инерции скорости изменялся динамически, либо был статическим и равным 0, 71.

Область определения функций по всем координатам: для Сферической функции $[-100; 100]$, для Повернутой Эллиптической $[-100; 100]$, для Розенброка $[-2 : 2]$, для Гринвока $[-100; 100]$, для Экли $[-5; 5]$, для Растрингина $[-5; 5]$, для Самбреро $[-10; 10]$.

Пример сводной таблицы полученных в ходе исследования результатов для каждой тестовой функции выглядит, как приведено в таблице 1.

кол. Агентов	кол. Переходов	w	топология	надежность	разброс	скорость	выч
100	250	статич	кластер 4	100	46:226	105,4	25000
200	1500	статич	кластер 3	94	299:1418	788,53	300000
400	5000	динамич	кластер 3	96	1296:3228	2720	2000000
600	6000	динамич	кластер 3	94	1329:3088	1692,744	3600000
600	8000	динамич	кластер 3	96	2350:2472	2395	4800000

Таблица 1 - Результаты эффективности алгоритма на функции Гринвока.

Анализ полученных результатов показал, что для унимодальных функций на низких размерностях алгоритм более эффективен при топологии <клика> с динамически изменяемым параметром инерции скорости. На многоэкстремальных функциях и высоких размерностях предпочтительнее использовать кластерную топологию размерности 3 и 4.

Пример, графика отражающего количество требуемых вычислений целевой функции представлен на Рисунке 2.

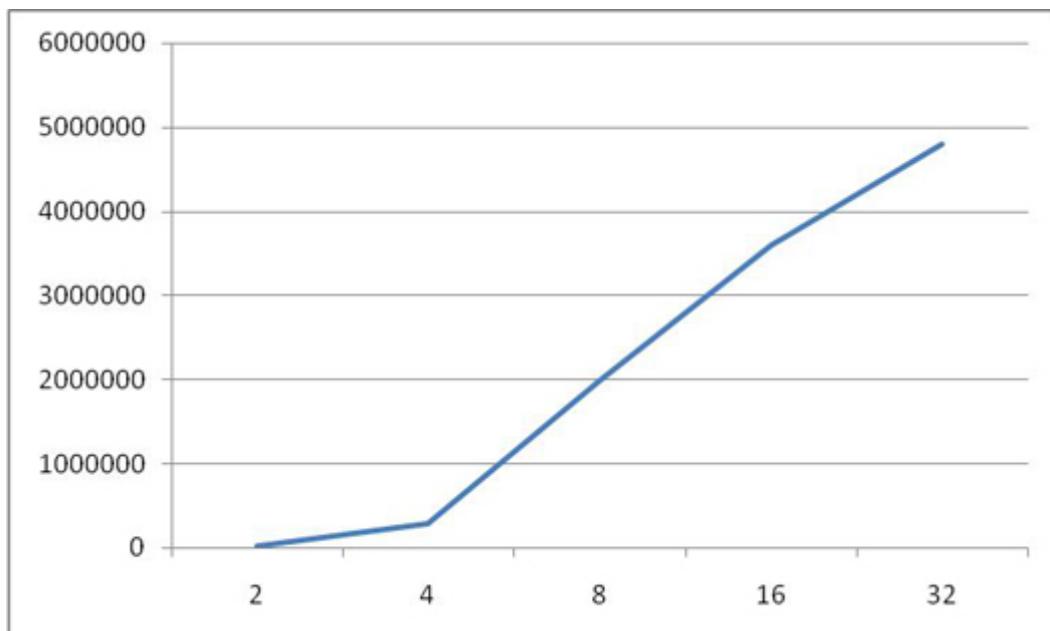


Рисунок 2 - Зависимость количества вычислений функции Гринвока от размерности пространства оптимизации

Рост вычислений при возрастании размерности является линейным, а не экспоненциальным как у генетического алгоритма, что характеризует PSO положительно. Необходимо в дальнейшем сравнить эффективность PSO с другими аналогичными стохастическими алгоритмами, а также предложить варианты автоматизации выбора параметров PSO, позволяющие пользователю избежать необходимости настройки параметров при решении реальных задач оптимизации. Провести опробацию PSO при решении прикладных задач оптимизации.

Список литературы

- [1] Holland, J. H. *Adaptation in natural and artificial systems [Text]*/ J. H. Holland. - [MI]: University of Michigan Press, 1975.
- [2] Dorigo, M. *Optimization, Learning and Natural Algorithms [Text]*: thesis : PhD / M. Dorigo. - Milan, 1992. - Unpublished doctoral dissertation.
- [3] Pham, D.T. *The Bees Algorithm. Technical Note, Manufacturing Engineering Centre [Text]*/ D. T. Pham. - [Cardiff University]: 2005.
- [4] Kennedy, J. *Particle swarm optimization [Text]*/ J. Kennedy, R. Eberhart // in Proc. of the IEEE Int. Conf. on Neural Networks. - Piscataway, 1995. - PP. 1942-1948.

ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ С АВТОМАТИЧЕСКИМ ВЫБОРОМ ТИПА СЕЛЕКЦИИ, ТИПА СКРЕЩИВАНИЯ И УРОВНЯ МУТАЦИИ

В.Б. Звонков

Сибирский государственный аэрокосмический университет, Институт информатики и телекоммуникаций

Научный руководитель - д.т.н., профессор Е.С. Семенкин

Генетические алгоритмы в различных формах применяются ко многим техническим и научным проблемам. Одно из наиболее важных применений генетических алгоритмов - оптимизация функций. Генетические алгоритмы обладают важными свойствами, благодаря которым они показывают свое превосходство над традиционными методами оптимизации: генетические алгоритмы работают одновременно с множеством решений, используют только значения целевой функции и не используют какую-либо дополнительную информацию, являются вероятностной оптимационной процедурой. Но генетические алгоритмы обладают существенным недостатком: они требуют тщательной настройки параметров для каждой

конкретной задачи с целью получения оптимального решения за приемлемое время. Если пользователь выбирает настройки наугад, то он может получить как высокую эффективность работы, так и очень низкую. При решении большинства задач, особенно реальных, этот подход является неприемлемым, поскольку нам необходимо за ограниченное время гарантированно получить наилучшее возможное решение.

В данной работе предлагается способ частичного решения проблемы: сокращение количества настраиваемых параметров. Автором разработаны и протестированы 7 модификаций генетического алгоритма: генетические алгоритмы с автоматической настройкой типа селекции, типа скрещивания, уровня мутации, а также с автоматической настройкой комбинаций селекция + мутация, селекция + скрещивание, мутация + скрещивание, селекция + мутация + скрещивание.

Все предложенные алгоритмы работают следующим образом. На каждом поколении осуществляется оценка распределения вероятностей выбора параметра или сочетания параметров, участвующих в формировании индивидов на следующем поколении. Вероятности выбора параметра или их сочетания зависят от того, насколько “хорошие” по значению функции приспособленности индивиды были получены с использованием данного параметра или сочетания параметров. Изначально все вероятности полагаются равными друг другу, поскольку у алгоритма еще нет информации об удачных и неудачных параметрах. Ни одна вероятность никогда не становится равной 0, поскольку при решении сложных задач необходимо взаимодействие всех параметров.

В качестве оценки скорости сходимости алгоритма к известному оптимуму использовались 2 подхода: среднее количество вычислений функции приспособленности до первого нахождения экстремума и средний номер поколения, на котором алгоритм впервые находит экстремум. Данные подходы эквивалентны при решении задач безусловной оптимизации, т.к. все алгоритмы работают с одинаковым размером популяции, т.е. выполняют одинаковое количество вычислений функции приспособленности. С целью объективного сравнения времени работы предложенных алгоритмов, время работы всех алгоритмов измерялось от начала и до окончания работы, а не до первого нахождения экстремума.

Для проверки корректности и эффективности работы предложенных алгоритмов они сравнивались со стандартным генетическим алгоритмом при решении тестовых задач безусловной оптимизации. Методика тестирования обычна, тестовые функции стандартные. Общее число комбинаций настроек на одной задаче для стандартного алгоритма составляет 360 (5

типов селекции, 3 вида скрещивания, 3 уровня мутации, 2 способа управления популяцией, концепция элитизма и ее отсутствие, 2 способа представления индивидов). Для алгоритма с автотонастройкой селекции общее число комбинаций настроек в пять раз меньше, чем для стандартного алгоритма, и равно 72. Для алгоритма с автотонастройкой мутации общее число комбинаций настроек в 3 раза меньше, чем для стандартного алгоритма, и равно 120. Общее число комбинаций настроек генетического алгоритма с автоматическим выбором мутации + скрещивания в девять раз меньше, чем для стандартного алгоритма, и равно 40. Генетические алгоритмы с автотонастройкой селекции + мутации, селекции + скрещивания позволяет сократить перебор настроек стандартного алгоритма в 15 раз, то есть число комбинаций настроек равно 24. Генетический алгоритм с автотонастройкой селекции + мутации + скрещивания имеет 8 комбинаций настроек, что в 45 раз меньше, чем для стандартного алгоритма.

В таблице 1 приведены усредненные результаты тестирования стандартного и модифицированных алгоритмов на 10 тестовых функциях (число независимых запусков – 500, бинарные строки по 46-50 бит, ресурсы – 100 индивидов на 100 поколений). Усреднение производилось по множеству тестовых задач. Из полученных усредненных результатов определялся разброс времени работы алгоритмов при различных сочетаниях настроек, разброс среднего номера поколения, на котором алгоритм впервые находит решение, разброс среднего количества вычислений функции приспособленности до первого нахождения решения. Настройки, при которых надежность работы алгоритма была равна 0, не учитывались.

По результатам данного тестирования, можно сделать следующие выводы:

- При тестировании алгоритмов наблюдалась статистическая устойчивость.
- Все предложенные алгоритмы показывают время работы, сравнимое со стандартным генетическим алгоритмом.
- Наибольший разброс надежностей показывает стандартный генетический алгоритм и алгоритмы с автоматическим выбором мутации, скрещивания, мутации + скрещивания. Это связано с тем, что все селекции участвуют в формировании индивидов, в том числе и самая худшая для данной конкретной задачи, т.е. которая и показывает очень низкую надежность работы. Кроме того, данные модификации показыва-

Таблица 1: Усредненные результаты тестирования генетических алгоритмов

Тип генетического алгоритма	Разброс надежностей	Разброс времени работы (с.)	Разброс средних поколений (когда алгоритм впервые находит оптимум)	Разброс среднего количества вычислений целевой функции (до нахождения оптимума)
Стандартный	[0, 1]	[22, 74]	[21, 84]	[2252, 8512]
Автонастройка селекции	[0.71, 1]	[34, 68]	[26, 59]	[2707, 6013]
Автонастройка мутации	[0, 0.99]	[20, 63]	[21, 84]	[2259, 8516]
Автонастройка скрещивания	[0, 1]	[29, 76]	[22, 85]	[2319, 8545]
Автонастройка селекции и мутации	[0.88, 0.99]	[33, 66]	[28, 39]	[2907, 3949]
Автонастройка мутации и скрещивания	[0, 0.99]	[27, 70]	[23, 81]	[2444, 8199]
Автонастройка селекции, мутации и скрещивания	[0.93, 1]	[39, 60]	[28, 35]	[2903, 3581]
Автонастройка селекции и скрещивания	[0.25, 1]	[36, 61]	[28, 66]	[2861, 6732]

ют большой разброс средних номеров поколений, на которых алгоритм впервые находит решение, в сравнении со стандартным алгоритмом.

- Наименьший разброс надежностей работы, разброс времени работы, разброс среднего количества вычислений функции приспособленности (до нахождения оптимума) или среднего номера поколения, на котором алгоритм впервые находит решение, показывает модификация генетического алгоритма, связанная с одновременной настройкой трех параметров: селекции, мутации и скрещивания.

По результатам данного исследования модифицированный алгоритм, связанный с одновременной автоматической настройкой селекции, мутации и скрещивания, может быть рекомендован в качестве замены стандартного алгоритма. Данный алгоритм уменьшает перебор настроек алгоритма в 45 раз, обеспечивает высокую надежность (более 0.9) при случайному выборе остальных настроек, обладает минимальным разбросом среднего количества вычислений функции приспособленности до первого нахождения решения. Данная модификация обладает временем работы, сравнимым со стандартным генетическим алгоритмом.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д.Н. Ковальчук

Сибирский федеральный университет, Институт математики

Научный руководитель — к.ф.-м.н. Т.Н. Шипина

В полосе $\Pi_{[0,T]} = \{(t, \xi) | 0 \leq t \leq T, \xi \in R\}$ рассматриваем систему

$$\begin{cases} U_t(t, \xi) + bU(t, \xi) + cV(t, \xi) = d \int_{-\infty}^{\infty} P_{2l}(\xi) V(t, \xi) d\xi + m_1(t, \xi), \\ V_t(t, \xi) + eU(t, \xi) + fV(t, \xi) = g \int_{-\infty}^{\infty} P_{2m}(\xi) U(t, \xi) d\xi + m_2(t, \xi), \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} P_{2l}(\xi) &= 1 + \xi^2 + \dots + \xi^{2l}, \\ P_{2m}(\xi) &= 1 + \xi^2 + \dots + \xi^{2m}, \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} U(0, \xi) &= U_0(\xi), \\ V(0, \xi) &= V_0(\xi). \end{aligned} \quad (2)$$

Задачи аналогичные рассмотренной в работе возникают при исследовании разрешимости обратных задач с использованием преобразования Фурье [1].

Теорема 1. *Пусть функции*

$b(t, \xi), e(t, \xi), c(t, \xi), f(t, \xi), d(t, \xi), g(t, \xi), m_1(t, \xi), m_2(t, \xi) \in C(\Pi_{[0,T]})$,
 $U_0, V_0 \in C(R)$ *и выполняются условия*

$$\begin{aligned} b(t, \xi) &< 0, \quad f(t, \xi) < 0, \\ (1 + |\xi|^{2k+1+\alpha})(|U_0(\xi)| + |V_0(\xi)| + |c(t, \xi)| + |e(t, \xi)| + |d(t, \xi)| + |g(t, \xi)| + & \\ & + |m_1(t, \xi)| + |m_2(t, \xi)|) < M_1, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$0 < \alpha < 1, k = \max\{m, l\},$$

тогда существует единственное решение $(u(t, \xi), v(t, \xi)) \in C^{1,0}(\Pi_{[0,T]})$ задачи (1) – (2), которое удовлетворяет условию

$$(1 + |\xi|^{2k+1+\alpha})(|U(t, \xi)| + |V(t, \xi)|) < M_2 \quad \forall (t, \xi) \in \Pi_{[0,T]}. \quad (4)$$

Здесь M_1 и M_2 — константы.

Доказательство. Используя метод последовательных приближений, докажем, что задача (1) – (2) имеет решение $(u(t, \xi), v(t, \xi))$, принадлежащее классу $C^{1,0}(\Pi_{[0,T]})$.

Рассмотрим итерационную процедуру

$$\begin{cases} U_t^{n+1} + bU^{n+1} + cV^n = d \int_{-\infty}^{\infty} P_{2l}(\xi)V^n d\xi + m_1(t, \xi), \\ V_t^{n+1} + eU^n + fV^{n+1} = g \int_{-\infty}^{\infty} P_{2m}(\xi)U^n d\xi + m_2(t, \xi), \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} U^{n+1}(0, \xi) &= U_0(\xi), \\ V^{n+1}(0, \xi) &= V_0(\xi). \end{aligned} \quad (6)$$

Зададим начальные итерации

$$\begin{aligned} U^0(t, \xi) &\equiv U_0(\xi), \\ V^0(t, \xi) &\equiv V_0(\xi). \end{aligned} \quad (7)$$

Решение задачи (5) на каждом $(n+1)$ шаге имеет вид

$$\begin{cases} U^{n+1} = U_0 e^{\int_0^t b d\tau} + \int_0^t e^{\int_\tau^t b d\tau} c V^n d\tau + \int_0^t e^{\int_\tau^t b d\tau} d \int_{-\infty}^{\infty} P_{2l}(\xi)V^n d\xi d\tau + \\ + \int_0^t e^{\int_\tau^t b d\tau} m_1(t, \xi) d\tau, \\ V^{n+1} = V_0 e^{\int_0^t f d\tau} + \int_0^t e^{\int_\tau^t f d\tau} e U^n d\tau + \int_0^t e^{\int_\tau^t f d\tau} g \int_{-\infty}^{\infty} P_{2m}(\xi)U^n d\xi d\tau + \\ + \int_0^t e^{\int_\tau^t f d\tau} m_2(t, \xi) d\tau. \end{cases} \quad (8)$$

Покажем, что последовательности $U^n(t, \xi)$, $V^n(t, \xi)$ ограничены.

Обозначим $y^n(t, \xi) = |U^n(t, \xi)| + |V^n(t, \xi)|$. Из системы (8) получим

$$\begin{aligned} y^n(t, \xi) &\leq |U_0| + |V_0| + \int_0^t (|c| + |e|) y^n(t, \xi) d\tau + \\ &+ \int_0^t (|d| + |g|) \int_{-\infty}^{\infty} P_{2k}(\xi) y^n(t, \xi) d\xi d\tau + \int_0^t (|m_1(t, \xi)| + |m_2(t, \xi)|) d\tau, \end{aligned} \quad (9)$$

где $k = \max\{m, l\}$.

Умножим (9) на $P_{2k}(\xi)$, учитывая условие (3) получим оценку

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{2k}(\xi) (|U^n(t, \xi)| + |V^n(t, \xi)|) d\xi \leq C_1. \quad (10)$$

Здесь и далее $C_i, i = 1, 2, \dots$ константы, которые не зависят от номера n . Умножим (9) на $(1 + |\xi|^{2k+1+\alpha})$, учитывая (10) и условие (3) получим

$$(1 + |\xi|^{2k+1+\alpha})(|U^{n+1}(t, \xi)| + |V^{n+1}(t, \xi)|) \leq C_2 \quad \forall (t, \xi) \in \Pi_{[0, T]}, \quad \alpha \in (0, 1). \quad (11)$$

Покажем, что последовательности $\{U^n(t, \xi)\}$, $\{V^n(t, \xi)\}$ являются фундаментальными. Рассмотрим

$$\begin{aligned} Z_1^{n+2}(t, \xi) &= U^{n+2}(t, \xi) - U^{n+1}(t, \xi), \\ Z_2^{n+2}(t, \xi) &= V^{n+2}(t, \xi) - V^{n+1}(t, \xi). \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда $Z_1^n(t, \xi)$ и $Z_2^n(t, \xi)$ удовлетворяют задаче

$$\begin{cases} Z_{1t}^{n+2}(t, \xi) = bZ_1^{n+2} + cZ_2^{n+1} + d \int_{-\infty}^{\infty} P_{2l} Z_2^{n+1} d\xi, \\ Z_{2t}^{n+2}(t, \xi) = eZ_1^{n+1} + fZ_2^{n+2} + g \int_{-\infty}^{\infty} P_{2m} Z_1^{n+1} d\xi, \end{cases} \quad (13)$$

$$Z_1(0, \xi) = 0, Z_2(0, \xi) = 0.$$

Покажем, что $Z_1^n(t, \xi) \rightarrow 0$ и $Z_2^n(t, \xi) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Из (13) получим

$$\begin{aligned} |Z_1^{n+2}(t, \xi)| &\leq \int_0^t |c| |Z_2^{n+1}(\tau, \xi)| d\tau + \int_0^t |d| \int_{-\infty}^{\infty} P_{2k} |Z_2^{n+1}(\tau, \xi)| d\xi d\tau, \\ |Z_2^{n+2}(t, \xi)| &\leq \int_0^t |e| |Z_1^{n+1}(\tau, \xi)| d\tau + \int_0^t |g| \int_{-\infty}^{\infty} P_{2k} |Z_1^{n+1}(\tau, \xi)| d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

Домножим (14) на P_{2k} и проинтегрируем по ξ

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} P_{2k} |Z_1^{n+2}| d\xi &\leq \int_{-\infty}^{\infty} P_{2k} \int_0^t |c| |Z_2^{n+1}| d\tau d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} P_{2k} \int_0^t |d| \int_{-\infty}^{\infty} P_{2k} |Z_2^{n+1}| d\xi d\tau d\xi, \\ \int_{-\infty}^{\infty} P_{2k} |Z_2^{n+2}| d\xi &\leq \int_{-\infty}^{\infty} P_{2k} \int_0^t |e| |Z_1^{n+1}| d\tau d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} P_{2k} \int_0^t |g| \int_{-\infty}^{\infty} P_{2k} |Z_1^{n+1}| d\xi d\tau d\xi. \end{aligned} \quad (15)$$

Обозначим

$$I^n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{2k}(\xi) (|Z_1^{n+1}| + |Z_2^{n+1}|) d\xi. \quad (16)$$

Сложим неравенства в (15). Тогда для $I^n(t)$ имеет место неравенство

$$I^{n+1}(t) \leq C_3 \int_0^t I^n(\tau) d\tau. \quad (17)$$

Рассмотривая (17) последовательно при $n = 0, 1, 2, \dots$, получаем оценку

$$I^{n+1}(t) \leq C_4 \frac{(C_3 T)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \forall t \in [0; T]. \quad (18)$$

Тогда из (14) следует, что

$$I^{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

. Аналогично покажем, что $Z_1^n(t, \xi) \rightarrow 0$ и $Z_2^n(t, \xi) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, последовательности $\{U^n(t, \xi)\}$, $\{V^n(t, \xi)\}$ являются фундаментальными, значит существуют функции $U(t, \xi)$, $V(t, \xi) \in C^{1,0}(\Pi_{[0;T]})$, к которым сходятся равномерно в $\Pi_{[0;T]}$ функциональные последовательности $U^n(t, \xi)$, $V^n(t, \xi)$ при $n \rightarrow \infty$ [2]. Так как для последовательностей $U^n(t, \xi)$, $V^n(t, \xi)$ выполнено условие (12), то для предельной функции будет выполнено

$$(1 + |\xi|^{2k+1+\alpha})(|U(t, \xi)| + |V(t, \xi)|) \leq C_2 \quad \forall (t, \xi) \in \Pi_{[0,T]}, \quad \alpha \in (0, 1). \quad (19)$$

Используя оценки (10), (19) можно показать, что будет выполнено

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2k}(\xi) U^n(t, \xi) d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2k}(\xi) U(t, \xi) d\xi, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2k}(\xi) V(t, \xi)^n d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2k}(\xi) V(t, \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Проинтегрируем систему (5) по t на $(0, t)$ и перейдя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\begin{cases} U = \int_0^t b U d\tau + \int_0^t c V d\tau + \int_0^t d \int_{-\infty}^{\infty} P_{2l}(\xi) V d\xi d\tau + \int_0^t m_1(t, \xi) d\tau, \\ V = \int_0^t e U d\tau + \int_0^t f V d\tau + \int_0^t g \int_{-\infty}^{\infty} P_{2m}(\xi) U d\xi d\tau + \int_0^t m_2(t, \xi) d\tau. \end{cases} \quad (20)$$

Так как правые части системы (20) дифференцируемы по t , то левые части также дифференцируемы по t . Следовательно, $U(t, \xi)$, $V(t, \xi) \in C^{1,0}(\Pi_{[0,T]})$. Продифференцируем (20) по t . В итоге получаем, что пара функций $U(t, \xi)$, $V(t, \xi)$ является решением системы уравнений (1). Выполнение начальных условий (2) для $U(t, \xi)$, $V(t, \xi)$ очевидно. Таким образом, $U(t, \xi)$, $V(t, \xi)$ являются решением задачи (1) – (2).

Для доказательства единственности решения задачи (1), (2) рассмотрим разность $z_1(t, \xi) = U_1(t, \xi) - U_2(t, \xi)$, $z_2(t, \xi) = V_1(t, \xi) - V_2(t, \xi)$. Нетрудно показать, что для $|z_1(t, \xi)| + |z_2(t, \xi)|$ выполнено

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_{2k}(\xi)(|z_1(t, \xi)| + |z_2(t, \xi)|)d\xi \leq 0.$$

Последнее неравенство гарантирует единственность решения задачи (1), (2).

Лемма 1. *Пусть для любого $T > 0$ выполнимы условия теоремы 1. Если существует $\gamma(t)$, такая что*

$$\int_{t^*}^{\infty} \gamma(t)d\tau \leq C_5$$

и выполнено

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} P_{2k}(\xi)(|m_1(t, \xi)| + |m_2(t, \xi)|)d\tau + \\ & + |c| + |e| + \int_{-\infty}^{\infty} P_{2k}(\xi)(|d| + |g|)d\xi \leq \gamma(t) \quad \forall t \leq t^*. \end{aligned}$$

Тогда для решения задачи (1) – (2) будет выполнено неравенство

$$\sup_{t \geq 0} \sup_{x \in R} |U(t, \xi)| + \sup_{t \geq 0} \sup_{x \in R} |V(t, \xi)| < C_6.$$

Лемма 2. *Если выполняются условия леммы 1 и*

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow +\infty} (\sup_{\xi \in R} |c(t, \xi)| + \sup_{\xi \in R} |e(t, \xi)| + \sup_{\xi \in R} |d(t, \xi)| + \sup_{\xi \in R} |g(t, \xi)| + \\ & + \sup_{\xi \in R} |m_1(t, \xi)| + \sup_{\xi \in R} |m_2(t, \xi)|) = 0, \end{aligned}$$

то решение задачи (1) – (2) стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

Список литературы

- [1] Yu.Ya. Belov. *Inverse problem for partial differential equations* Utrecht-Boston-Tokyo, 2002.
- [2] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. *Элементы теории функций и функционального анализа, Физматлит*, 2006.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДВУХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ПОЛУЛИНЕЙНОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

В.Г. Копылова

Сибирский федеральный университет, Институт математики

Научный руководитель — д.ф.-м.н., профессор Ю.Я. Белов

В данной работе рассматривается идентификация двух коэффициентов в полулинейном параболическом уравнении для задачи Коши. Подобные задачи были рассмотрены в работе [2].

Рассмотрим в области $G_{[0,T]} = \{(t, x, z) \mid 0 \leq t \leq T, x \in E_1, z \in E_1\}$ задачу Коши

$$u_t(t, x, z) = a_1(t, x)u_{xx}(t, x, z) + a_2(t, x)u_{zz}(t, x, z) + \\ + \lambda_1(t, x)u_z(t, x, z) + \lambda_2(t, x)M(t, u(t, x, z)) + f(t, x, z) \quad (1)$$

$$u(0, x, z) = u_0(x, z) \quad (2)$$

Функции $\lambda_1(t, x), \lambda_2(t, x)$ подлежат определению одновременно с решением $u(t, x, z)$ задачи (1), (2), удовлетворяющим условиям переопределения

$$u(t, x, 0) = \varphi_1(t, x), \quad (3)$$

$$u_z(t, x, 0) = \varphi_2(t, x) \quad (4)$$

и условиям согласования

$$u_0(x, 0) = \varphi_1(0, x), \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}u_0(x, 0) = \varphi_2(0, x). \quad (6)$$

Относительно функции $M(t, y)$ также предполагаем, что она достаточно гладкая, имеет непрерывные производные, входящие в следующее ниже соотношение и

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial y^k} M(t, y) \right| \leq M_0(1 + |y|^p), k = 0, 1, \dots, 11, 0 \leq t \leq T, y \in E_1. \quad (7)$$

Здесь M_0 — постоянная, p -фиксированное натуральное число, $M^{(k)}(t, y) = \frac{\partial^k}{\partial y^k} M(t, y)$, $k \geq 1$ — целое, $M^{(0)}(t, y) = M(t, y)$.

Приведем задачу (1) — (4) к некоторой вспомогательной прямой задаче. Положим $z = 0$ в (1), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t, x) = a_1(t, x)\varphi_{1xx}(t, x) + a_2(t, x)u_{zz}(t, x, 0) + \lambda_1(t, x)\varphi_2(t, x) + \\ + \lambda_2(t, x)M(t, \varphi_1(t, x)) + f(t, x, 0) \quad (8)$$

Продифференцируем (1) по z , положим $z = 0$. Учитывая (3), (4), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_2(t, x) &= a_1(t, x) \varphi_{2xx}(t, x) + a_2(t, x) u_{zzz}(t, x, 0) + \lambda_1 u_{zz}(t, x, 0) + \\ &\quad + \lambda_2(t, x) M^{(1)}(t, \varphi_1(t, x)) \varphi_2 + f_z(t, x, 0) \end{aligned} \quad (9)$$

Из (8), (9) находим

$$\begin{aligned} \lambda_1(t, x) &= \frac{A_1(t, x) + A_2(t, x) u_{zz}(t, x, 0) + A_3(t, x) u_{zzz}(t, x, 0)}{M^{(1)}(t, \varphi_1) \varphi_2^2 - M(t, \varphi_1) u_{zz}(t, x, 0)} \\ \lambda_2(t, x) &= \frac{B_1(t, x) + B_2(t, x) u_{zz}|_{z=0} + B_3(t, x) u_{zzz}|_{z=0} + B_4(t, x) u_{zz}^2|_{z=0}}{M^{(1)}(t, \varphi_1) \varphi_2^2 - M(t, \varphi_1) u_{zz}|_{z=0}} \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \psi_1(t, x) &= \varphi_{1t}(t, x) - a_1(t, x) \varphi_{1xx}(t, x) - f(t, x, 0), \\ \psi_2(t, x) &= \varphi_{2t}(t, x) - a_1(t, x) \varphi_{2xx}(t, x) - f_z(t, x, 0), \\ A_1(t, x) &= \psi_1(t, x) \varphi_2(t, x) M^{(1)}(t, \varphi_1) - \psi_2(t, x) M(t, \varphi_1), \\ A_2(t, x) &= -a_2(t, x) \varphi_2(t, x) M^{(1)}(t, \varphi_1), \\ A_3(t, x) &= a_2(t, x) M(t, \varphi_1), \\ B_1(t, x) &= \psi_2(t, x) \varphi_2(t, x), B_2(t, x) = -\psi_1(t, x), \\ B_3(t, x) &= -a_2(t, x) \varphi_2(t, x), B_4(t, x) = a_2(t, x) - \end{aligned}$$

известные функции.

Учитывая выражения для коэффициентов $\lambda_1(t, x), \lambda_2(t, x)$, приходим к следующей задаче

$$\begin{aligned} u_t(t, x, z) &= a_1(t, x) u_{xx}(t, x, z) + a_2(t, x) u_{zz}(t, x, z) + \\ &\quad + \frac{A_1(t, x) + A_2(t, x) u_{zz}(t, x, 0) + A_3(t, x) u_{zzz}(t, x, 0)}{M^{(1)}(t, \varphi_1) \varphi_2^2 - M(t, \varphi_1) u_{zz}(t, x, 0)} u_z(t, x, z) + \\ &\quad + \frac{B_1(t, x) + B_2(t, x) u_{zz}|_{z=0} + B_3(t, x) u_{zzz}|_{z=0} + B_4(t, x) u_{zz}^2|_{z=0}}{M^{(1)}(t, \varphi_1) \varphi_2^2 - M(t, \varphi_1) u_{zz}(t, x, 0)} M(t, u) + \\ &\quad + f(t, x, z), \end{aligned} \quad (10)$$

$$u(0, x, z) = u_0(x, z) \quad (11)$$

Введем функцию срезки $S_\delta(y)$, определенную на E_1 , достаточно гладкую, обладающую следующими свойствами

$$S_\delta(y) \geq \frac{\delta}{3} > 0, y \in E_1, \text{ и } S_\delta(y) = \begin{cases} y, & y \geq \frac{\delta}{2}, \\ \frac{\delta}{3}, & y \leq \frac{\delta}{3}. \end{cases}$$

Возьмем срезку

$$\begin{aligned}
u_t(t, x, z) = & a_1(t, x)u_{xx}(t, x, z) + a_2(t, x)u_{zz}(t, x, z) + \\
& + \frac{A_1(t, x) + A_2(t, x)u_{zz}(t, x, 0) + A_3(t, x)u_{zzz}(t, x, 0)}{S_\delta(M^{(1)}(t, \varphi_1)\varphi_2^2 - M(t, \varphi_1)u_{zz}(t, x, 0))}u_z(t, x, z) + \\
& + \frac{B_1(t, x) + B_2(t, x)u_{zz}|_{z=0} + B_3(t, x)u_{zzz}|_{z=0} + B_4(t, x)u_{zz}^2|_{z=0}}{S_\delta(M^{(1)}(t, \varphi_1)\varphi_2^2 - M(t, \varphi_1)u_{zz}(t, x, 0))}M(t, u) + \\
& + f(t, x, z), \quad (12)
\end{aligned}$$

Докажем теперь существование решения вспомогательной прямой задачи (10), (11). Воспользуемся методом слабой аппроксимации. Расщепим задачу и линеаризуем ее сдвигом по времени на $(t - \frac{\tau}{3})$ в нелинейных членах.

$$u_t^\tau = 3a_1(t, x)u_{xx}^\tau(t, x, z), \quad j\tau < t \leq \left(j + \frac{1}{3}\right)\tau \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
u_t^\tau = & 3a_2(t, x)u_{zz}^\tau(t, x, z) + 3\frac{R_1^\tau(t, x)}{S_\delta(R_3^\tau(t, x))}u_z^\tau(t, x, z), \\
& \left(j + \frac{1}{3}\right)\tau < t \leq \left(j + \frac{2}{3}\right)\tau, \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_t^\tau = & 3\frac{R_2^\tau(t, x)}{S_\delta(R_3^\tau(t, x))}M(t, u^\tau(t - \frac{\tau}{3}, x, z)) + 3f(t, x, z), \\
& \left(j + \frac{2}{3}\right)\tau < t \leq (j + 1)\tau, \quad (15)
\end{aligned}$$

$$u^\tau(t, x, z)|_{t \leq 0} = u_0(x, z), \quad x \in E_1, z \in E_1. \quad (16)$$

Здесь $j = 0, 1, \dots, N - 1; \tau N = T; u^\tau = u^\tau(t, x, z)$,

$$R_1^\tau(t, x) = A_1(t, x) + A_2(t, x)u_{zz}^\tau(t - \frac{\tau}{3}, x, 0) + A_3(t, x)u_{zzz}^\tau(t - \frac{\tau}{3}, x, 0),$$

$$R_2^\tau(t, x) = B_1 + B_2u_{zz}^\tau(t - \frac{\tau}{3}, x, 0) + B_3u_{zzz}^\tau(t - \frac{\tau}{3}, x, 0) + B_4(u_{zz}^\tau)^2(t - \frac{\tau}{3}, x, 0),$$

$$R_3^\tau(t, x) = (M^{(1)}(t, \varphi_1)\varphi_2^2 - M(t, \varphi_1)u_{zz}^\tau(t - \frac{\tau}{3}, x, 0)).$$

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующие соотношения и удовлетворяют им

$$\left| \frac{\partial^m}{\partial x^m} \psi_i(t, x) \right| + \left| \frac{\partial^m}{\partial x^m} a_i(t, x) \right| + \left| \frac{\partial^{m+1}}{\partial t \partial x^m} \varphi_i(t, x) \right| \leq C, \quad (17)$$

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} \frac{\partial^m}{\partial x^m} u_0(x, z) \right| + \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(t, x, z) \right| \leq C, \quad (18)$$

Здесь $m = 0, 1, \dots, 4$, $i = 1, 2$, $k = 0, 1, \dots, 11 - 2m$, $(t, x, y) \in G_{[0, T]}$, C – постоянная больше единицы.

Пусть также выполняются следующее условие при $(t, x) \in \Pi_{[0, T]}$

$$M^{(1)}(t, \varphi_1(t, x))\varphi_2^2(t, x) - M(t, \varphi_1(t, x))\frac{\partial^2}{\partial z^2}u_0(x, 0) \geq \delta \quad (19)$$

Доказано выполнение следующих априорных оценок равномерно по τ при $(t, x, z) \in G_{[0, t^*]}$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^k}{\partial z^k} u^\tau(t, x, z) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^k}{\partial z^k} u^\tau(t, x, z) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^k}{\partial z^k} u^\tau(t, x, z) \right| \leq C, k = 0, \dots, 5, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^k}{\partial z^k} \frac{\partial^m}{\partial x^m} u^\tau(t, x, z) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^k}{\partial z^k} \frac{\partial^m}{\partial x^m} u^\tau(t, x, z) \right| + \\ & + \left| \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^k}{\partial z^k} \frac{\partial^m}{\partial x^m} u^\tau(t, x, z) \right| \leq C, m = 0, 1, 2, k = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (21)$$

В силу теоремы Арцела о компактности некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t, x, z)$ последовательности $u^\tau(t, x, z)$ решений задачи (13)-(16) сходится вместе с производными по x до второго и по z до третьего порядка включительно к функции $u(t, x, z) \in C_{t,x,z}^{0,2,3}(G_{[0, t^*]}) \cap C_{t,x,z}^{0,0,5}(G_{[0, t^*]})$.

Доказано на основании теоремы метода слабой аппроксимации, что $u(t, x, z)$ есть решение задачи (10), (11), причем $u(t, x, z) \in C_{t,x,z}^{1,2,3}(G_{[0, t^*]}) \cap C_{t,x,z}^{0,0,5}(G_{[0, t^*]})$, где

$$C_{t,x,z}^{1,2,3}(G_{[0, t^*]}) = \left\{ f(t, x, z) \mid f, f_t \in C(G_{[0, t^*]}), \right. \\ \left. \frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^k}{\partial z^k} f \in C(G_{[0, t^*]}), m \leq 2, k = 0, 1, 2, 3 \right\}, \quad (22)$$

$$C_{t,x,z}^{0,0,5}(G_{[0, t^*]}) = \left\{ f(t, x, z) \mid \frac{\partial^k}{\partial z^k} f \in C(G_{[0, t^*]}), k = 0, \dots, 5 \right\}. \quad (23)$$

Было доказано, что в уравнении (12) срезка снимается. Таким образом, функция $u(t, x, z)$ удовлетворяет уравнению (10).

Следовательно, доказано существование решения $u(t, x, z)$ прямой задачи (10), (11) в классе $C_{t,x,z}^{1,2,3}(G_{[0, t^*]}) \cap C_{t,x,z}^{0,0,5}(G_{[0, t^*]})$.

Тройка функций $u(t, x, z), \lambda_1(t, x), \lambda_2(t, x)$ принадлежит классу

$$Z(t^*) = \left\{ u(t, x, z), \lambda_1(t, x), \lambda_2(t, x) \mid u \in C_{t,x,z}^{1,2,3}(G_{[0, t^*]}) \cap C_{t,x,z}^{0,0,5}(G_{[0, t^*]}), \right. \\ \left. \lambda_1(t, x), \lambda_2(t, x) \in C_{t,x}^{0,2}(\Pi_{[0, t^*]}) \right\},$$

и удовлетворяет при $(t, x, z) \in G_{[0, t^*]}$ неравенствам

$$\sum_{k=0}^5 \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} u(t, x, z) \right| \leq C, \quad \sum_{m=0}^2 \sum_{k=0}^3 \left| \frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^k}{\partial z^k} u(t, x, z) \right| \leq C, \quad (24)$$

$$\sum_{m=0}^2 \left| \frac{\partial^m}{\partial x^m} \lambda_1(t, x) \right| + \sum_{m=0}^2 \left| \frac{\partial^m}{\partial x^m} \lambda_2(t, x) \right| \leq C, \quad (t, x) \in \Pi_{[0, t^*]}. \quad (25)$$

Классы $C_{t,x,z}^{1,2,3}(G_{[0, t^*]})$, $C_{t,x,z}^{0,0,5}(C_{[0, t^*]})$ определены в (22), (23), а

$$C_{t,x}^{0,2}(\Pi_{[0, t^*]}) = \left\{ g(t, x) \mid \frac{\partial^m}{\partial x^m} g(t, x) \in C(\Pi_{[0, t^*]}), m = 0, 1, 2 \right\}.$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (5)- (7), (17)- (19). Тогда существует решение $u(t, x, z), \lambda_1(t, x), \lambda_2(t, x)$ задачи (1)- (4) в классе $Z(t^*)$, удовлетворяющее соотношениям (24), (25).

Теорема 2. Решение $u(t, x, z), \lambda_1(t, x), \lambda_2(t, x)$ задачи (1)- (7), удовлетворяющее соотношениям (24), (25), единственно в классе $Z(t^*)$.

Из теорем 1 и 2 следует

Теорема 3. Пусть выполняются условия (5)- (7), (17)-(19). Тогда существует и единственно решение $u(t, x, z), \lambda_1(t, x), \lambda_2(t, x)$ задачи (1)- (4) в классе $Z(t^*)$, удовлетворяющее соотношениям (24), (25).

Список литературы

- [1] Ю.Я. Белов, С.А. Кантор. *Метод слабой аппроксимации*, КрасГУ, 1999.
- [2] Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков. *О задаче идентификации двух коэффициентов параболического полулинейного уравнения* // Вестник КрасГУ: физико-математические науки. - Красноярск: КрасГУ, 2004.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В ДВУМЕРНОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

Е.Н. Кригер

Сибирский федеральный университет, Институт математики

Научный руководитель — к.ф.-м.н. И.В. Фроленков

В работе доказаны существование, единственность и устойчивость по входным данным решения задачи идентификации функции источника специального вида в параболическом уравнении в случае данных Коши. Задача идентификации функции источника вида $\lambda(t, x)f(t, x, z)$ рассмотрена в

работе [6]. В [3] изучен случай, когда условия переопределения задаются на гладкой кривой, а неизвестная функция источника имеет вид $\lambda(t)f(t, x)$.

Рассмотрим в $G_{[0,T]} = \{(t, x, z) \mid 0 \leq t \leq T, (x, z) \in \mathbb{R}^2\}$ задачу Коши для параболического уравнения

$$u_t = u_{xx} + u_{zz} + f(t, x, z) \cdot \lambda(t, x, z), \quad t \in (0, T), \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(0, x, z) = u_0(x, z). \quad (2)$$

Пусть заданы условия переопределения

$$u(t, x, \alpha) = \varphi(t, x), \quad u(t, \beta, z) = \psi(t, z). \quad (3)$$

Считаем выполненными условия согласования

$$u_0(x, \alpha) = \varphi(0, x), \quad u_0(\beta, z) = \psi(0, z), \quad \varphi(t, \beta) = \psi(t, \alpha), \quad (4)$$

и условия на функцию $f(t, x, z)$

$$|f(t, \beta, z)| \geq \delta_1 > 0, \quad |f(t, x, \alpha)| \geq \delta_2 > 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall (x, z) \in \mathbb{R}^2, \quad (5)$$

$\alpha, \beta, \delta_1, \delta_2$ — некоторые фиксированные постоянные.

Одновременно с решением $u(t, x, z)$ определению подлежит функция

$$\lambda(t, x, z) = \lambda_1(t, x) + \lambda_2(t, z). \quad (6)$$

Входные данные ограничены и имеют непрерывные производные, входящие в соотношение (7).

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \varphi(t, x) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} \psi(t, z) \right| + \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u_0(x, z) \right| + \\ & + \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} f(t, x, z) \right| \leq C, \quad k_1, k_2 = 0, 1, \dots, 6. \end{aligned} \quad (7)$$

Используя условия переопределения (3), находим

$$\lambda(t, x, z) = g(t, x, z) - \frac{u_{xx}(t, \beta, z)}{f(t, \beta, z)} - \frac{u_{zz}(t, x, \alpha)}{f(t, x, \alpha)}, \quad (8)$$

где $g(t, x, z)$ — известная функция, зависящая от входных данных.

Подставляя выражение (8) в уравнение (1), переходим к вспомогательной прямой задаче для уравнения

$$\begin{aligned} u_t = u_{xx} + u_{zz} + f(t, x, z) \cdot \left[-\frac{u_{xx}(t, \beta, z)}{f(t, \beta, z)} - \frac{u_{zz}(t, x, \alpha)}{f(t, x, \alpha)} \right] + f(t, x, z) \cdot g(t, x, z), \\ t \in (0, T), \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (9)$$

с начальным условием (2).

Для доказательства существования решения задачи (9), (2) используем метод слабой аппроксимации и расщепление

$$u_t^\tau = 4 \cdot (u_{xx}^\tau + u_{zz}^\tau), \quad n\tau < t \leq (n + \frac{1}{4})\tau; \quad (10)$$

$$u_t^\tau = 4 \cdot u_{xx}^\tau (t - \frac{\tau}{4}, \beta, z) \cdot \Phi_1(t, x, z), \quad (n + \frac{1}{4})\tau < t \leq (n + \frac{1}{2})\tau; \quad (11)$$

$$u_t^\tau = 4 \cdot u_{zz}^\tau (t - \frac{\tau}{4}, x, \alpha) \cdot \Phi_2(t, x, z), \quad (n + \frac{1}{2})\tau < t \leq (n + \frac{3}{4})\tau; \quad (12)$$

$$u_t^\tau = 4 \cdot G(t, x, z), \quad (n + \frac{3}{4})\tau < t \leq (n + 1)\tau, \quad (13)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, (N - 1), \quad N\tau = T,$$

$$u^\tau(0, x, z) = u_0(x, z). \quad (14)$$

Доказаны равномерные по τ оценки

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u^\tau(t, x, z) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u^\tau(t, x, z) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u^\tau(t, x, z) \right| + \\ + \left| \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u^\tau(t, x, z) \right| \leq C, \quad k_1, k_2 = 0, 1, \dots, 4, \end{aligned} \quad (15)$$

которые гарантируют выполнение условий теоремы Арцела о компактности ([1]). В силу теоремы Арцела, некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t, x, z)$ последовательности $u^\tau(t, x, z)$ решений задачи (10)–(14) сходится вместе с производными по x и по z до четвертого порядка включительно к функции $u(t, x, z) \in C_{t,x,z}^{0,4,4}(G_{[0,T]})$, которая в силу теоремы сходимости МСА ([1]) является решением задачи (9), (2), причем $u(t, x, z) \in C_{t,x,z}^{1,4,4}(G_{[0,T]})$, где

$$\begin{aligned} C_{t,x,z}^{1,p_1,p_2}(G_{[0,T]}) = \\ = \left\{ q(t, x, z) \mid q_t, \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1} \partial z^{k_2}} q \in C(G_{[0,T]}), k_1 = 0, 1, \dots, p_1, k_2 = 0, 1, \dots, p_2 \right\}. \end{aligned}$$

Для решения $u(t, x, z)$ доказано выполнение условий переопределения (3). Следовательно, пара функций $u(t, x, z), \lambda(t, x, z)$ является решением обратной задачи (1)–(4).

Доказаны следующие теоремы

Теорема 1. Пусть выполняются условия (5)–(7). Тогда существует решение $u(t, x, z), \lambda(t, x, z)$ обратной задачи (1)–(4) в классе

$$Z(T) = \left\{ u(t, x, z), \lambda(t, x, z) \mid u \in C_{t,x,z}^{1,4,4}(G_{[0,T]}), \lambda(t, x, z) \in C_{t,x,z}^{1,2,2}(G_{[0,T]}) \right\},$$

удовлетворяющее соотношению

$$\sum_{k_1=0}^4 \sum_{k_2=0}^4 \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} u(t, x, z) \right| + \sum_{k_1=0}^2 \sum_{k_2=0}^2 \left| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}} \lambda(t, x, z) \right| \leq C. \quad (16)$$

Теорема 2. Решение $u(t, x, z)$, $\lambda(t, x, z) = \lambda_1(t, x) + \lambda_2(t, z)$ задачи (1)–(5), удовлетворяющее соотношению (16), единствено в классе $Z(T)$.

Также в работе доказана устойчивость решения задачи (1)–(3) по входным данным. Если рассмотреть два набора входных данных, удовлетворяющих условию (7), и соответствующих им решений из класса $Z(T)$, удовлетворяющих условиям (16), и обозначить

$$\begin{aligned} U &= u^1 - u^2, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 = \lambda_1^1 - \lambda_1^2 + \lambda_2^1 - \lambda_2^2, \\ F &= f^1 - f^2, \quad U_0 = u_0^1 - u_0^2, \quad \Phi = \varphi^1 - \varphi^2, \quad \Psi = \psi^1 - \psi^2, \end{aligned} \quad (17)$$

то нетрудно убедиться, что $\Lambda(t, x, z)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Lambda(t, x, z) &= -\frac{U_{xx}(t, \beta, z)}{f^2(t, \beta, z)} - \frac{U_{zz}(t, x, \alpha)}{f^2(t, x, \alpha)} + \\ &+ \frac{\Psi_t(t, z) - \Psi_{zz}(t, z) - F(t, \beta, z) \cdot \lambda^1(t, \beta, z)}{f^2(t, \beta, z)} + \\ &+ \frac{\Phi_t(t, x) - \Phi_{xx}(t, x) - F(t, x, \alpha) \cdot \lambda^1(t, x, \alpha)}{f^2(t, x, \alpha)} - \\ &- \frac{\Psi_t(t, \alpha) - \Phi_{xx}(t, \beta) - \Psi_{zz}(t, \alpha) + F(t, \beta, \alpha) \cdot \lambda^1(t, \beta, \alpha)}{f^2(t, \beta, \alpha)}, \end{aligned} \quad (18)$$

а функция $U(t, x, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} U_t(t, x, z) &= U_{xx}(t, x, z) + U_{zz}(t, x, z) + F(t, x, z) \cdot \lambda^1(t, x, z) + \\ &+ f^2(t, x, z) \cdot \left(-\frac{U_{xx}(t, \beta, z)}{f^2(t, \beta, z)} - \frac{U_{zz}(t, x, \alpha)}{f^2(t, x, \alpha)} + \right. \\ &+ \frac{\Psi_t(t, z) - \Psi_{zz}(t, z) - F(t, \beta, z) \cdot \lambda^1(t, \beta, z)}{f^2(t, \beta, z)} + \\ &+ \frac{\Phi_t(t, x) - \Phi_{xx}(t, x) - F(t, x, \alpha) \cdot \lambda^1(t, x, \alpha)}{f^2(t, x, \alpha)} - \\ &\left. - \frac{\Psi_t(t, \alpha) - \Phi_{xx}(t, \beta) - \Psi_{zz}(t, \alpha) + F(t, \beta, \alpha) \cdot \lambda^1(t, \beta, \alpha)}{f^2(t, \beta, \alpha)} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

с начальным условием

$$U(0, x, z) = U_0(x, z).$$

Используя расщепление уравнения (19) следующего вида,

$$\begin{aligned}
U_t^\tau &= 5 \cdot (U_{xx}^\tau + U_{zz}^\tau), \quad n\tau < t \leq (n + \frac{1}{5})\tau; \\
U_t^\tau &= -5 \cdot A_1(t, x, z) \cdot U_{xx}^\tau (t - \frac{\tau}{5}, \beta, z), \quad (n + \frac{1}{5})\tau < t \leq (n + \frac{2}{5})\tau; \\
U_t^\tau &= -5 \cdot A_2(t, x, z) \cdot U_{zz}^\tau (t - \frac{\tau}{5}, x, \alpha), \quad (n + \frac{2}{5})\tau < t \leq (n + \frac{3}{5})\tau; \\
U_t^\tau &= 5 \cdot F(t, x, z) \cdot \lambda^1(t, x, z), \quad (n + \frac{3}{5})\tau < t \leq (n + \frac{4}{5})\tau, \\
U_t^\tau &= 5 \cdot K(t, x, z), \quad (n + \frac{4}{5})\tau < t \leq (n + 1)\tau, \\
n &= 0, 1, 2, \dots, (N - 1), \quad N\tau = T,
\end{aligned}$$

где функции $A_1(t, x, z)$, $A_2(t, x, z)$ известны, а $K(t, x, z)$ зависит от функций $F(t, x, z)$, $\Psi(t, z)$, $\Phi(t, x)$, и учитывая следующие обозначения

$$\begin{aligned}
\|U(t, x, z)\|_1 &= \sum_{k_1=0}^4 \sum_{k_2=0}^4 \sup_{0<\xi\leq T} \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1} \partial z^{k_2}} U(\xi, x, z) \right|, \\
\|U_0(x, z)\|_2 &= \sum_{k_1=0}^4 \sum_{k_2=0}^4 \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1} \partial z^{k_2}} U_0(x, z) \right|, \\
\|\Psi(t, z)\|_3 &= \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^6 \sup_{0<\xi\leq T} \sup_{z\in\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^{i+j}}{\partial t^i \partial z^j} \Psi(\xi, z) \right|, \\
\|\Phi(t, x)\|_4 &= \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^6 \sup_{0<\xi\leq T} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^{i+j}}{\partial t^i \partial x^j} \Phi(\xi, x) \right|,
\end{aligned}$$

доказана оценка

$$\begin{aligned}
\|u^1 - u^2\|_1 + \|\lambda^1 - \lambda^2\|_1 &\leq \\
&\leq C \cdot \left(\|u_0^1 - u_0^2\|_2 + \|f^1 - f^2\|_1 + \|\psi^1 - \psi^2\|_3 + \|\varphi^1 - \varphi^2\|_4 \right). \quad (20)
\end{aligned}$$

Теорема 3. При выполнении условий (4)–(7) для решения $u(t, x, z)$, $\lambda(t, x, z)$ задачи (1)–(3) выполняется оценка (20) устойчивости по входным данным.

Список литературы

- [1] Ю.Я. Белов, С.А. Кантор. *Метод слабой аппроксимации*, КрасГУ, 1999.
- [2] Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков. *Некоторые задачи идентификации коэффициентов полулинейных параболических уравнений*, ДАН, 2005, Т.404, №5, с.583 – 585.
- [3] Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков. *О задаче идентификации двух коэффициентов параболического полулинейного уравнения с условиями переопределения, заданными на гладкой кривой*, Специальный выпуск журнала «Вычислительные технологии», посвященный 85-летию академика Н.Н. Яненко, 2006, Т.11, ч.1, с.46 – 54.

- [4] А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. *Уравнения математической физики, Наука, 1977.*
- [5] В.П. Михайлов. *Дифференциальные уравнения в частных производных, Наука, 1976.*
- [6] О.А. Афиногенова, Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков. *О стабилизации решения задачи идентификации функции источника одномерного параболического уравнения, ДАН, 2009, Т.424, № 4, с.439 – 441.*
- [7] Н.Н. Яненко. *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосибирск, 1967, 195с.*

О ФУНКЦИЯХ СО СВОЙСТВОМ ОДНОМЕРНОГО ГОЛОМОРФНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ВДОЛЬ НЕКОТОРОГО СЕМЕЙСТВА КОМПЛЕКСНЫХ ПРЯМЫХ

В.И. Кузоватов

Сибирский федеральный университет, Институт математики
Научный руководитель — д.ф.-м.н. А.М. Кытманов

Данная работа содержит результат, связанный с голоморфным продолжением функций, заданных на границе ограниченной области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, в эту область. Речь пойдет о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль семейств комплексных прямых.

На комплексной плоскости \mathbb{C} результаты о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения тривиальны, поэтому результаты работы существенно многомерны.

Первый результат, относящийся к нашей теме, был получен М. Л. Аграновским и Р. Е. Вальским в [2], изучившими функции с одномерным свойством голоморфного продолжения в шаре. Доказательство основывалось на свойствах группы автоморфизмов шара.

Е. Л. Стгаутом в [1], использовавшим комплексное преобразование Радона, теорема Аграновского и Вальского была перенесена на произвольные ограниченные области с гладкой границей. Альтернативное доказательство теоремы Стгаута получено А. М. Кытмановым в [4], применившим интеграл Бохнера – Мартинелли. Идея использования интегральных представлений (Бохнера – Мартинелли, Коши – Фантаплье) оказалась полезной при изучении функций с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых.

Пусть D – ограниченная область в \mathbb{C}^n ($n > 1$) со связной гладкой гра-

ницей ∂D (класса C^2). Сформулируем результат Е. Л. Ставта [1].

Рассмотрим одномерные комплексные прямые l вида

$$l = \{\zeta : \zeta_j = z_j + b_j t, j = 1, \dots, n, t \in \mathbb{C}\}, \quad (1)$$

проходящие через точку $z \in \mathbb{C}^n$ в направлении вектора $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$ (направление b определяется с точностью до умножения на комплексное число $\lambda \neq 0$).

По теореме Сарда для почти всех $z \in \mathbb{C}^n$ и почти всех $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$ пересечение $l \cap \partial D$ представляет собой набор конечного числа кусочно-гладких кривых (за исключением вырожденного случая, когда $\partial D \cap l = \emptyset$).

Дадим следующее определение. Функция $f \in C(\partial D)$ обладает *одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексной прямой l* ($l \cap \partial D \neq \emptyset$), если существует функция f_l со следующими свойствами

- a) $f_l \in C(\overline{D} \cap l)$,
- b) $f_l = f$ на множестве $\partial D \cap l$,
- c) функция f_l голоморфна во внутренних (относительно топологии l) точках множества $\overline{D} \cap l$.

Теорема 1 ([1]). *Если функция $f \in C(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых вида (1), то f голоморфно продолжается в D .*

Более узкое семейство комплексных прямых, достаточное для голоморфного продолжения, было рассмотрено М. Л. Аграновским и А. М. Семеновым [3].

Рассмотрим открытое множество $V \subset D$ и семейство \mathfrak{L}_V комплексных прямых, пересекающих это множество.

Теорема 2 ([3]). *Если функция $f \in C(\partial D)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль прямых из семейства \mathfrak{L}_V для некоторого открытого множества $V \subset D$, тогда функция f голоморфно продолжается в D .*

Напомним, что гладкое (класса C^∞) многообразие Γ называется порождающим, если для каждой точки $z \in \Gamma$ комплексная линейная оболочка касательного пространства $T_z(\Gamma)$ совпадает с \mathbb{C}^n . Обозначим через \mathfrak{L}_Γ семейство всех комплексных прямых, пересекающих Γ .

Теорема 3 ([6]). *Пусть Γ – росток порождающего многообразия в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ и функция $f \in C(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморф-*

ногого продолжения вдоль всех комплексных прямых из \mathfrak{L}_Γ , тогда существует функция $F \in C(\overline{D})$, голоморфная в D и совпадающая с функцией f на границе ∂D .

В дальнейшем мы будем рассматривать росток Ω комплексной гиперповерхности, имеющий вид

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n : z_n = \varphi(z')\}, \quad z' = (z_1, \dots, z_{n-1}),$$

где целая функция φ удовлетворяет условиям $\varphi(0) = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z_s}(0) = 0$, $s = 1, \dots, n-1$.

Теорема 4. Пусть D – ограниченная область в \mathbb{C}^n ($n > 1$) со связной гладкой границей ∂D (класса C^2) и функция $f \in C(\partial D)$. Рассмотрим росток Ω комплексной гиперповерхности, лежащей вне \overline{D} . Пусть функция f обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль почти всех комплексных прямых из \mathfrak{L}_Ω , пересекающих D , тогда функция f голоморфно продолжается в D , т. е. существует функция $F \in C(\overline{D})$, голоморфная в D и совпадающая с функцией f на границе ∂D .

Доказательство. Рассмотрим интеграл Бохнера – Мартинелли от функции f :

$$F(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) U(\zeta, z), \quad z \notin \partial D,$$

где $U(\zeta, z)$ – ядро Бохнера – Мартинелли, т. е.

$$U(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\bar{\zeta}_j - \bar{z}_j}{|\zeta - z|^{2n}} d\bar{\zeta}[j] \wedge d\zeta,$$

и $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n$, а $d\bar{\zeta}[j]$ получается из $d\bar{\zeta}$ вычеркиванием дифференциала $d\bar{\zeta}_j$.

Лемма 1 ([6]). Если для точки $z \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ и для всех комплексных прямых, проходящих через z , функция f обладает одномерным свойством голоморфного продолжения, то $F(z) = 0$ и все производные порядка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$$\frac{\partial^\alpha F}{\partial z^\alpha}(z) = \frac{\partial^{\|\alpha\|} F}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}}(z) = 0,$$

$$zde \|\alpha\| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Сделаем сдвиг и унитарное преобразование так, чтобы некоторая точка $z^0 \in \Omega$ перешла в 0 и в некоторой окрестности $W \subset (\mathbb{C}^n \setminus \overline{D})$ точки 0 комплексная гиперповерхность Ω имеет вид:

$$\Omega = \{z \in W : z_n = \varphi(z')\}.$$

При таком преобразовании сохраняется гармоничность функции F .

Лемма 1 показывает, что в условиях теоремы 4 функция F будет удовлетворять условиям

$$\left. \frac{\partial^\alpha F}{\partial z^\alpha} \right|_\Omega = 0 \text{ для всех мультииндексов } \alpha. \quad (2)$$

Лемма 2. *Если гармоническая в окрестности W функция F удовлетворяет условиям (2), то разложение Тейлора функции F в окрестности нуля будет иметь вид*

$$F(z) = P_{1,0,1}(z') \bar{z}_n + \sum_{t=2}^{\infty} \sum_{l=0}^t \sum_{k=0}^{t-2+l} P_{t,k,l}(z', \bar{z}') z_n^k \bar{z}_n^l,$$

где t – порядок производной по сопряженным переменным.

Далее показывается, что интеграл Бохнера – Мартинелли равен нулю в окрестности W . Так как он представляет собой вещественно – аналитическую функцию, а дополнение $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ – связно, то $F(z) = 0$ в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$. Применяя теорему о голоморфности функций, представимых интегралом Бохнера – Мартинелли (теорема 15.4 из [5]), получаем, что функция F голоморфна в D и ее граничные значения совпадают с f на ∂D .

Список литературы

- [1] E.L. Stout. *The boundary values of holomorphic functions of several complex variables* // Duke Math. J. 1977. – V. 44. – № 1. – P. 105–108.
- [2] М.Л. Аграновский. *Максимальность инвариантных алгебр функций* / М.Л. Аграновский, Р.Е. Вальский // Сиб. матем. журн. 1971. – Т. 12. – № 1. – С. 3–12.
- [3] М.Л. Аграновский. *Границные аналоги теоремы Гартогса* / М.Л. Аграновский, А.М. Семенов // Сиб. матем. журн. 1991. – Т. 32. – № 1. – С. 168–170.
- [4] Л.А. Айзенберг. *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе* / Л.А. Айзенберг, А.П. Южаков. – Новосибирск: Наука, 1979.

- [5] А.М. Кытманов. *Интеграл Бехнера – Мартинелли и его применения*. — Новосибирск: Наука, 1992.
- [6] А.М. Кытманов. *О семействах комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения* / А.М. Кытманов, С.Г. Мысливец // Мат. заметки. 2008. — Т. 83. — № 4. — С. 545–551.

РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О СОВМЕСТНОМ ДВИЖЕНИИ ТРЁХ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ПЛОСКИХ СЛОЯХ

Е.Н. Лемешкова

Сибирский федеральный университет, Институт математики
Научный руководитель — д.ф.-м.н. В.К. Андреев

Исследовано совместное одностороннее движение трех вязких жидкостей под действием градиента давления в слое, ограниченном твёрдыми стенками. Анализ движения сводится к решению сопряжённой начально-краевой задачи для трёх параболических уравнений.

Пусть $u_j(y, t)$ — скорости жидкостей в слоях в направлении оси x . Тогда они удовлетворяют уравнениям

$$u_{1t} = \nu_1 u_{1yy} - f_1(t), \quad 0 < y < h_1 \quad (1.1)$$

$$u_{2t} = \nu_2 u_{2yy} - f_2(t), \quad h_1 < y < h_2 \quad (1.2)$$

$$u_{3t} = \nu_3 u_{3yy} - f_3(t), \quad h_2 < y < h_3 \quad (1.3)$$

где функции $f_j(t)$ — градиенты давлений, $j = 1, 2, 3$, связаны соотношением $\rho_3 f_3 = \rho_2 f_2 = \rho_1 f_1$. В начальный момент времени жидкости покоятся:

$$u_j(y, 0) = 0. \quad (1.4)$$

На поверхностях раздела равны касательные напряжения при $t \geq 0$ и скорости:

$$\mu_1 u_{1y}(h_1, t) - \mu_2 u_{2y}(h_1, t) = 0, \quad (1.5)$$

$$\mu_2 u_{2y}(h_2, t) - \mu_3 u_{3y}(h_2, t) = 0, \quad (1.6)$$

$$u_1(h_1, t) = u_2(h_1, t), \quad u_2(h_2, t) = u_3(h_2, t). \quad (1.7)$$

На твёрдых стенках $y = 0$ и $y = h_3$ выполнены условия прилипания

$$u_1(0, t) = 0, \quad u_3(h_3, t) = 0. \quad (1.8)$$

В (1.1)–(1.3) ν_j —кинематические вязкости, а в (1.5)–(1.6) $\mu_j = \nu_j \rho_j$, ρ_j —плотности жидкостей.

Стационарное решение

Предположим, что скорости и градиенты давлений не зависят от времени—стационарное течение, при этом начальные условия (1.4) не ставятся. Тогда задача (1.1)–(1.8) имеет стационарное решение

$$u_1^0(y) = \frac{\rho_1 f_1^0 h_3^2}{2\mu_1} \left[\frac{\bar{h}_1^2 y^2}{h_1^2} + \frac{\bar{h}_1 g y}{h_1} \right]; \quad (2.1)$$

$$u_2^0(y) = \frac{\rho_1 f_1^0 h_3^2}{2\mu_1} \left[\frac{\bar{h}_1^2 \bar{\mu}_1 y^2}{h_1^2} + \frac{\bar{h}_1 \bar{\mu}_1 g y}{h_1} + \bar{h}_1 (1 - \bar{\mu}_1) (h_1 + g) \right]; \quad (2.2)$$

$$u_3^0(y) = \frac{\rho_1 f_1^0 h_3^2 \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2}{2\mu_3} \left[\frac{\bar{h}_1^2 y^2}{h_1^2} + \frac{\bar{h}_1 g y}{h_1} - 1 - g \right] \quad (2.3)$$

с известной функцией

$$g = \frac{(\bar{\mu}_1 - 1)\bar{h}_1^2 + \bar{\mu}_1(\bar{\mu}_2 - 1)\bar{h}_2^2 - \bar{\mu}_1\bar{\mu}_2}{(1 - \bar{\mu}_1)\bar{h}_1 + \bar{\mu}_1(1 - \bar{\mu}_2)\bar{h}_2 + \bar{\mu}_1\bar{\mu}_2},$$

где $\bar{\mu}_1 = \mu_1/\mu_2$, $\bar{\mu}_2 = \mu_2/\mu_3$, $\bar{h}_1 = h_1/h_3$, $\bar{h}_2 = h_2/h_3$.

Решение нестационарной задачи методом преобразований

Лапласа

Применим преобразование Лапласа к задаче (1.1)–(1.8). Получим для изображений $U_j(y, p)$ уравнения

$$U_{jyy} - \frac{p U_j}{\nu_j} = \frac{F_j}{\nu_j}, \quad (3.1)$$

где $F_j = F_j(p)$ —изображения функций $f_j(t)$, $j = 1, 2, 3$; использованы свойство связи дифференцирования оригинала и начальные условия (1.4). Границные условия $U_j(y, p)$ совпадают с (1.5)–(1.8), где надо t заменить на p . Общее решение уравнения (3.1) имеет вид

$$U_j = C_1^j \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_j}} y + C_2^j \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_j}} y + \frac{F_j}{p} \quad (3.2)$$

с постоянными C_1^j и C_2^j , которые находятся из граничных условий при $y = 0, h_1, h_2, h_3$:

$$\begin{aligned} C_1^1 &= \frac{1}{\Delta} [-b_1 - (a_2 b_2 + a_1 b_3) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_1 + (a_2 b_3 + a_1 b_2) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_1] \\ C_2^1 &= \frac{1}{\Delta} [-b_1 (-\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_1 + \frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\bar{\nu}_1}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_1) + \\ &\quad + a_2 (b_3 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1 - b_2 \frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\bar{\nu}_1}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2^2 &= \frac{1}{\Delta} [b_1 \left(\frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\bar{\nu}_1}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_1 - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_1 \right) - \\
&\quad - a_1 (b_3 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1 - b_2 \frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\bar{\nu}_1}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1)] \\
C_3^1 &= \frac{\frac{\bar{\mu}_2}{\sqrt{\bar{\nu}_2}} (C_2^1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_2 + C_2^2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_2) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} h_3 - \frac{F_3}{p} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} h_2}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (h_3 - h_2)} \\
C_3^2 &= \frac{\frac{F_3}{p} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} h_2 - \frac{\bar{\mu}_2}{\sqrt{\bar{\nu}_2}} (C_2^1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_2 + C_2^2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_2) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} h_3}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (h_3 - h_2)} \\
a_1 &= \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_2 + \frac{\bar{\mu}_2}{\sqrt{\bar{\nu}_2}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (h_3 - h_2) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_2 \\
a_2 &= \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_2 + \frac{\bar{\mu}_2}{\sqrt{\bar{\nu}_2}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (h_3 - h_2) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_2 \\
b_1 &= \frac{F_3}{\Delta p} + \frac{F_2 - F_3}{p} b_2 = \frac{1}{p} [F_1 (1 - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1) - F_2] b_3 = -\frac{\bar{\mu}_1 F_1}{\sqrt{\bar{\nu}_1} p} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1 \\
\Delta &= a_2 \left(\frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\bar{\nu}_1}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_1 - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_1 \right) + \\
&\quad + a_1 \left(\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_1 - \frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\bar{\nu}_1}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} h_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} h_1 \right)
\end{aligned}$$

Доказано, что если градиент давления имеет конечный предел, то есть $\lim_{t \rightarrow \infty} f_j(t) = f_j^0$, то и решение выходит на стационарный режим $\lim_{p \rightarrow 0} pU_j(y, p) = u_j^0(y)$, где $u_j^0(y)$ задаются формулами (2.1)–(2.3).

Последнее равенство доказывается с помощью полученных явных формул для изображений решений по Лапласу и асимптотических разложений гиперболических функций.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №=08-01-00762.

Список литературы

- [1] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. *Методы теории функций комплексного переменного*: -М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.

ПОИСК ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

М.А. Лопаткина

Сибирский федеральный университет, Институт математики

Научный руководитель — д.т.н., Е.С. Семенкин

Оптимизационные задачи заключаются в нахождении экстремума заданной целевой функции. Как правило, это сложная функция, зависящая от некоторых входных параметров. Требуется найти значения этих параметров, при которых целевая функция достигает экстремума.

Существует целый класс оптимизационных методов. С их помощью можно найти экстремальное значение целевой функции, но не всегда можно быть уверенным, что получено значение глобального экстремума. Это называется преждевременной сходимостью. Кроме того, существует и другая проблема — время процесса вычислений. Зачастую более точные оптимизационные методы работают очень долго. Для решения поставленных проблем успешно используются генетические алгоритмы (ГА). Это стохастические методы, основанные на принципах естественного отбора Ч. Дарвина. Основной идеей является организация «борьбы за существование» и «естественного отбора» среди пробных решений.

Был реализован стандартный ГА, включающий в себя все основные операторы генетического программирования — селекцию, скрещивание и мутацию, а также элитизм.

На ряде тестовых функций, которые обычно вызывают затруднения у локальных методов, было проведено исследование работы алгоритма. Запуски алгоритма проводились с ресурсами — 100 индивидов на 100 поколений. Т.к. ГА являются методами случайного поиска, проводилась серия независимых запусков одного алгоритма на одной задаче в одинаковых условиях и использовалось математическое ожидание для построения оценок. Наблюдалась статистическая устойчивость, т.е. с увеличением количества экспериментов, точность результата увеличивалась. Учитывались два основных критерия эффективности ГА — надежность (процент успешных запусков к общему числу запусков) и скорость сходимости (номер итерации, когда было найдено решение, усредненное по числу успешных запусков алгоритма).

Усредненные по всему множеству задач результаты работы ГА:

- разброс надежности варьируется от 78.6% до 94%;
- разброс скорости сходимости — от 20.8 до 60.7.

Анализ результатов показал, что эффективность алгоритма сильнее

зависит от уровня мутации и наличия элитизма, чем от типа селекции и скрещивания. При сохранении копии лучшего индивида увеличивается надежность алгоритма.

Таким образом, ГА являются универсальным методом оптимизации многопараметрических функций, что позволяет решать широкий спектр задач. Но следует помнить, что применение ГА полезно лишь в тех случаях, когда для данной задачи нет подходящего специального алгоритма решения.

Список литературы

- [1] Т.В. Панченко. *Генетические алгоритмы: учебно-методическое пособие / под ред. Ю. Ю. Тарасевича.* — Астрахань: Издательский дом «Астраханский университет», 2007.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СТАЦИОНАРНЫХ ПОЛЕЙ ТЕМПЕРАТУР В КОНТАКТИРУЮЩИХ КОНЕЧНЫХ ЦИЛИНДРАХ

Е.П. Магденко

Сибирский федеральный университет, Институт математики

Научный руководитель — д.ф.-м.н. В.К. Андреев

1. Постановка задачи

Имеются два тела цилиндрической формы ($\Omega_1 = (0, a) \times (0, 2\pi) \times (-h_1, 0)$, $\Omega_2 = (0, a) \times (0, 2\pi) \times (0, h_2)$), которые контактируют друг с другом. Пусть $\Theta_j(r, z)$ — стационарное распределение температур в Ω_j , $j = 1, 2$. Внутренние источники тепла отсутствуют. Тогда уравнение теплопроводности в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Theta_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_j}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta_j}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Границные условия таковы (k_1, k_2 — коэффициенты теплопроводности сред)

$$\Theta_j(a, z) = \bar{\Theta}_j(z), \quad \Theta_1(r, -h_1) = \tilde{\Theta}_1(r), \quad \Theta_2(r, h_2) = \tilde{\Theta}_2(r), \quad (2)$$

$$\Theta_1(r, 0) = \Theta_2(r, 0), \quad k_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial z}(r, 0) = k_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial z}(r, 0). \quad (3)$$

Первые три из них означают, что на всей поверхности цилиндра задана температура, а третье и четвертое — равенство температур и потоков тепла

на поверхности контакта (раздела двух сред $z=0$). Заметим, что для непрерывности температур должны быть выполнены условия согласования

$$\bar{\Theta}_1(-h_1) = \tilde{\Theta}_1(a), \quad \bar{\Theta}_2(h_2) = \tilde{\Theta}_2(a), \quad k_1 \frac{\partial \bar{\Theta}_1}{\partial z}(0) = k_2 \frac{\partial \bar{\Theta}_2}{\partial z}(0). \quad (4)$$

Поскольку поставленная задача является линейной, то будем искать сначала решение при $\bar{\Theta}_j(z) \equiv 0$ методом разделения переменных. Найдем частные решения уравнений (1) в виде

$$\Theta_j = R_j(r)Z_j(z). \quad (5)$$

Из уравнения (1) с учетом ограниченности Θ_j при $r=0$ находим

$$R_j(r) = AJ_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right), \quad (6)$$

где $J_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right)$ - функция Бесселя [1], а $\mu_m = \sqrt{\lambda_m}a$ - её нули. Тогда

$$Z_j m = C_{jm} sh \sqrt{\lambda_m} z + D_{jm} ch \sqrt{\lambda_m} z \quad (7)$$

Таким образом, найдено счетное число решений вида (5). Составим формальный ряд

$$\Theta_j(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(C_{jm} sh \sqrt{\lambda_m} z + D_{jm} ch \sqrt{\lambda_m} z \right) J_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right) \quad (8)$$

По построению $\Theta_j(r, z)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям на боковой поверхности $\Theta_j(a, z) = 0$. Оставшиеся четыре постоянные C_{jm} , D_{jm} находятся из (2) и (3)

$$D_{1m} = D_{2m} = \frac{2}{kb_m c_m + a_m d_m} \left(\frac{k c_m (\tilde{\Theta}_1, J_0) + a_m (\tilde{\Theta}_1, J_0)}{a^2 J_1^2(\mu_m)} \right), \quad (9)$$

$$C_{1m} = \frac{1}{k} C_{2m} = \frac{2}{kb_m c_m + a_m d_m} \left(\frac{b_m (\tilde{\Theta}_2, J_0) - d_m (\tilde{\Theta}_1, J_0)}{a^2 J_1^2(\mu_m)} \right), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} sh \sqrt{\lambda_m} h_1 &= a_m, & sh \sqrt{\lambda_m} h_2 &= c_m, \\ ch \sqrt{\lambda_m} h_1 &= b_m, & ch \sqrt{\lambda_m} h_2 &= d_m. \end{aligned} \quad (11)$$

Значит, решение задачи полностью найдено в виде рядов (8). Преобразуем ряд для $\Theta_1(r, z)$:

$$\begin{aligned} \Theta_1(r, z) &= \frac{2}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(kb_m c_m + a_m d_m) J_1^2(\mu_m)} \\ &\times \left((\tilde{\Theta}_2, J_0) sh \sqrt{\lambda_m} (h_1 + z) + (\tilde{\Theta}_1, J_0) \right. \\ &\times \left. \left(k sh \sqrt{\lambda_m} h_2 ch \sqrt{\lambda_m} z - ch \sqrt{\lambda_m} h_2 sh \sqrt{\lambda_m} z \right) \right) J_0\left(\mu_m \frac{r}{a}\right). \end{aligned} \quad (12)$$

Докажем, что ряд для Θ_1 сходится в пространстве $L_2[(0, a) \times (-h_1, 0)]$, $L_2[(0, a) \times (0, h_2)]$. Положим

$$\begin{aligned} A_m &= \left(b_m(\tilde{\Theta}_2, J_0) - d_m(\tilde{\Theta}_1, J_0) \right) sh\sqrt{\lambda_m}z \\ &+ \left(kc_m(\tilde{\Theta}_1, J_0) + a_m(\tilde{\Theta}_1, J_0) \right) ch\sqrt{\lambda_m}z. \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\Theta_1(r, z)\|_{L_2[(0, a) \times (-h_1, 0)]}^2 &= \int_0^a \int_{-h_1}^0 \int_0^{2\pi} r \Theta_1^2 d\varphi dz dr \\ &= 2\pi \int_0^a \int_{-h_1}^0 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(kb_m c_m + a_m d_m) J_1^2(\mu_m)} A_m J_0 \left(\mu_m \frac{r}{a} \right) \right)^2 dz dr \\ &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-h_1}^0 \frac{1}{(kb_m c_m + a_m d_m) J_1^4(\mu_m)} A_m^2 \left\| J_0 \left(\mu_m \frac{r}{a} \right) \right\|^2 dz \\ &= \pi a^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(kb_m c_m + a_m d_m) J_1^2(\mu_m)} \int_{-h_1}^0 A_m^2(z) dz, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \int_{-h_1}^0 A_m^2 dz &= \frac{a^2}{2} J_1^2(\mu_m) \\ &\times \left(\left(|b_m| \|\tilde{\Theta}_2\| + |d_m| \|\tilde{\Theta}_1\| \right)^2 \left(\frac{h_1}{2} + \frac{a_m}{4\sqrt{\lambda_m}} \right) \right. \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\lambda_m}} \left(|a_m| |b_m| \|\tilde{\Theta}_2\|^2 + k |c_m| |d_m| \|\tilde{\Theta}_1\|^2 + \right. \\ &\quad \left. \left. \|\tilde{\Theta}_1\| \|\tilde{\Theta}_2\| (k |b_m| |c_m| + |a_m| |d_m|) \right) \right. \\ &\times (1 - b_m) + \left. \left(|b_m| \|\tilde{\Theta}_2\| + |d_m| \|\tilde{\Theta}_1\| \right)^2 \left(\frac{-h_1}{2} + \frac{a_m}{4\sqrt{\lambda_m}} \right) \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Известно, что $\mu_m \sim m\pi$.

Тогда $a_m \sim \frac{e^{\frac{h_1}{a}m\pi}}{2}$, $b_m \sim \frac{e^{\frac{h_1}{a}m\pi}}{2}$, $c_m \sim \frac{e^{\frac{h_2}{a}m\pi}}{2}$, $d_m \sim \frac{e^{\frac{h_2}{a}m\pi}}{2}$.

В результате получим

$$\begin{aligned}
& \|\Theta_1(r, z)\|_{L_2[(0, a) \times (0, h_2)]}^2 \\
& \leq \pi \frac{a^4}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{4}{k+1} e^{\frac{-2h_1}{a} m \pi} (\|\tilde{\Theta}_1\| + \|\tilde{\Theta}_2\|)^2 \left(\frac{h_1}{2} + \frac{a}{8m\pi} e^{\frac{h_1}{a} m \pi} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{a}{2m\pi} \frac{1}{(k+1)^2} e^{\frac{-2h_1}{a} m \pi} \left(\|\tilde{\Theta}_2\|^2 + k \|\tilde{\Theta}_1\|^2 + (k+1) \|\tilde{\Theta}_1\| \right. \right. \\
& \quad \times \|\tilde{\Theta}_2\| \left(1 - \frac{1}{2} e^{\frac{h_1}{a} m \pi} \right) + \frac{4}{k+1} e^{\frac{-2h_1}{a} m \pi} \left(k |c_m| \|\tilde{\Theta}_1\| + |a_m| \|\tilde{\Theta}_2\| \right)^2 \\
& \quad \times \left. \left. \left(\frac{h_1}{2} + \frac{a}{8m\pi} e^{\frac{h_1}{a} m \pi} \right) \right) \leq K \sum_{m=1}^{\infty} e^{\frac{-h_1}{a} m \pi} = K \frac{1}{1 - e^{\frac{-h_1}{a} \pi}}, \right)
\end{aligned} \tag{16}$$

где $K > 0$ - постоянная.

Аналогичным образом получаем оценку и для $\|\Theta_2(r, z)\|_{L_2[(0, a) \times (0, h_2)]}^2$, т. е. ряды сходятся в $L_2[(0, a) \times (-h_1, 0)]$, $L_2[(0, a) \times (0, h_2)]$.

2. Единственность решения

Пусть теперь распределение температур в средах является нестационарным: $\Theta_j = \Theta_j(r, z, t)$. Для этих функций имеем начально-краевую задачу

$$\frac{\partial \Theta_j}{\partial t} = \chi_j \Delta \Theta_j, \tag{17}$$

$$\Theta_j(r, z, 0) = \Theta_j^0(r, z), \tag{18}$$

$$\Theta_1(r, 0, t) = \Theta_2(r, 0, t), \quad k_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial z}(r, 0, t) = k_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial z}(r, 0, t). \tag{19}$$

Докажем, что поставленная начально-краевая задача (17) имеет единственное решение, которое является стационарным, если $\Theta_j^0(r, z)$ - решение стационарной задачи. Предположим, что имеется два решения Θ_j^1, Θ_j^2 . Пусть $T_j = \Theta_j^1 - \Theta_j^2$. Подставим это выражение в (17) и получим новую начально-краевую задачу в области Ω_j

$$\frac{T_j}{\partial t} = \chi_j \Delta T_j, \tag{20}$$

$$T_j(r, z, 0) = 0, \tag{21}$$

$$T_1(r, 0, t) = T_2(r, 0, t), \quad k_1 \frac{\partial T_1}{\partial z}(r, 0, t) = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial z}(r, 0, t), \tag{22}$$

$$T_1(r, -h_1, t) = T_2(r, h_2, t) = 0, \quad T_j(a, z, t) = 0.$$

Учитывая, что $\chi_j = k_j/(\rho_j c_j)$, где k_j - коэффициент теплопроводности; ρ_j - плотность среды; c_j - удельная теплоемкость, умножим обе части уравнения на T_j и проинтегрируем их по области Ω_j . Дальше используем формулы $\Delta T_j = \operatorname{div}(\nabla T_j)$; $\operatorname{div}(a\vec{b}) = a\operatorname{div}\vec{b} + (\nabla a, \vec{b})$ и формулу Остроградского-Гаусса. В результате всех этих преобразований получим интегральное тождество

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_1 c_1}{2} \int_{\Omega_1} T_1^2 d\Omega_1 + \frac{\rho_2 c_2}{2} \int_{\Omega_2} T_2^2 d\Omega_2 \right) \\ &= -k_1 \int_{\Omega_1} |\nabla T_1|^2 d\Omega_1 - k_2 \int_{\Omega_2} |\nabla T_2|^2 d\Omega_2, \end{aligned} \quad (23)$$

откуда $E(t) \leq E(0) = 0$. Поэтому $T_j = 0$ в Ω_j и решение начально-краевой задачи (17) единственное, и если начальные данные есть решение стационарной задачи, то и решение является стационарным $\forall t > 0$.

Список литературы

- [1] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. *Уравнения математической физики.* М.:Наука, 1972.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА МНОГОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А.С. Майнагашева

Сибирский федеральный университет, Институт математики
Научный руководитель — к.ф.-м.н. И.В. Фроленков

В работе исследуется обратная задача для многомерного параболического уравнения с эллиптическим оператором специального вида. Доказаны теоремы существования и единственности решения в классе гладких ограниченных функций.

Случай, когда неизвестная функция источника имеет вид $\lambda(t)f(t, x)$ рассмотрен в работе [2] с условием переопределения заданным на гладкой кривой. В работе [4] рассмотрен случай, когда неизвестная функция источника имеет вид $\lambda(t, x)f(t, x, z)$, а условия переопределения заданы на фиксированной гиперповерхности $z = \gamma$. Задача идентификации функции источни-

ка вида $\lambda(t, x)f(t, x, z)$ с эллиптическим оператором $L_x(u) = \sum_{i=1}^n a_i(t)u_{x_i x_i}$ рассмотрена в работе [5].

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t, x, z) \mid 0 \leq t \leq T, x \in E_n, z \in E_1\}$ рассматривается задача нахождения двух действительнозначных функций $(u(t, x, z), \lambda(t, x))$, являющихся решением задачи

$$u_t(t, x, z) = L_x(u) + u_{zz}(t, x, z) + \lambda(t, x)f(t, x, z), \quad (1)$$

$$u(0, x, z) = u_0(x, z), \quad (x, z) \in E_{n+1}, \quad (2)$$

$$u(t, x, \gamma(t)) = \varphi(t, x), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in E_n, \quad (3)$$

$$u_0(x, \gamma(0)) = \varphi(0, x), \quad x \in E_n. \quad (4)$$

Здесь

$$L_x(u) = \sum_{i=1}^n a_i(t, x_i)u_{x_i x_i}(t, x, z),$$

где $a_i(t, x_i) \in C([0, T] \times E_1)$, $a_i(t, x_i) \geq a_0(t) > 0$.

Предположим, что при $(t, x) \in \Pi_{[0,T]} = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq T, x \in E_n\}$ выполняется соотношение

$$|f(t, x, \gamma(t))| \geq \delta > 0. \quad (5)$$

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующие ниже соотношения (6), (7), (8) и удовлетворяют этим соотношениям :

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) \right| + |D_x^\alpha \varphi(t, x)| \leq C, \quad |\alpha| \leq 4, \quad (6)$$

$$\left| \frac{\partial^p}{\partial x_i^p} a_i(t, x_i) \right| \leq C, \quad p = \overline{1, 4}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^6 \left(\left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} u_0(x, z) \right| + \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} f(t, x, z) \right| \right) + \sum_{k=0}^4 \sum_{1 \leq |\alpha| \leq 4} \left(\left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\alpha u_0(x, z) \right| + \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\alpha f(t, x, z) \right| \right) \leq C, \end{aligned} \quad (8)$$

$(t, x, z) \in G_{[0,T]}$, C — постоянная больше единицы.

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Используя условие переопределения, подставляя в (1) $\gamma(t)$ вместо z , находим выражение для коэффициента $\lambda(t, x)$

$$\lambda(t, x) = \frac{\psi(t, x) - u_z(t, x, \gamma(t))\gamma'(t) - u_{zz}(t, x, \gamma(t))}{f(t, x, \gamma(t))},$$

где $\psi(t, x) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, x) - L_x(\varphi)$ — известная функция.

$$\sum_{i=1}^n a_i(t, x_i) u_{x_i x_i}(t, x, \gamma(t)) = \sum_{i=1}^n a_i(t, x_i) \varphi_{x_i x_i}(t, x) = L_x(\varphi).$$

Подставляем полученное выражение для $\lambda(t, x)$ в исходное уравнение и приходим к следующей прямой задаче для нагруженного уравнения

$$\begin{aligned} u_t(t, x, z) &= L_x(u) + u_{zz}(t, x, z) + \\ &+ \frac{\psi(t, x) - u_z(t, x, \gamma(t))\gamma'(t) - u_{zz}(t, x, \gamma(t))}{f(t, x, \gamma(t))} f(t, x, z), \quad (9) \\ u(0, x, z) &= u_0(x, z). \end{aligned}$$

Для доказательства существования решения прямой задачи используется метод слабой аппроксимации [3, 7]. Расщепим задачу и сделаем сдвиг по времени на $(t - \frac{\tau}{2})$ на втором дробном шаге в следах неизвестных функций.

$$u_t^\tau(t, x, z) = 2L_x(u^\tau) + 2u_{zz}^\tau(t, x, z), \quad t \in \left(j\tau, \left(j + \frac{1}{2}\right)\tau\right], \quad (11)$$

$$\begin{aligned} u_t^\tau(t, x, z) &= 2 \frac{\psi(t, x) - u_z^\tau(t - \frac{\tau}{2}, x, \gamma(t))\gamma'(t) - u_{zz}^\tau(t - \frac{\tau}{2}, x, \gamma(t))}{f(t, x, \gamma(t))} f(t, x, z), \\ t &\in \left(\left(j + \frac{1}{2}\right)\tau, (j+1)\tau\right], \quad (12) \end{aligned}$$

$$u^\tau(0, x, z) = u_0(x, z), \quad x \in E_n, \quad z \in E_1. \quad (13)$$

Здесь $j = 0, 1, \dots, N-1$; $N\tau = T$; $u^\tau = u^\tau(t) = u^\tau(t, x, z)$.

Доказаны равномерные по τ при $(t, x, z) \in G_{[0, T]}$ априорные оценки

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^m}{\partial z^m} u^\tau(t, x, z) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\alpha u^\tau(t, x, z) \right| &\leq C, \\ m &= \overline{0, 4}, \quad k = \overline{0, 2}, \quad 1 \leq |\alpha| \leq 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^m}{\partial z^m} u^\tau(t, x, z) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\alpha u^\tau(t, x, z) \right| &\leq C, \\ m &= \overline{0, 4}, \quad k = \overline{0, 2}, \quad 1 \leq |\alpha| \leq 2, \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^m}{\partial z^m} u^\tau(t, x, z) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\alpha u^\tau(t, x, z) \right| \leq C,$$

$$m = \overline{0, 4}, \quad k = \overline{0, 2}, \quad 1 \leq |\alpha| \leq 2.$$

Данные оценки на основании теоремы Арцела о компактности гарантируют компактность семейства решений $u^\tau(t, x, z)$ задачи (11), (12). Некоторая подпоследовательность $\{u^{\tau_k}\}$ последовательности u^τ при $\tau \rightarrow 0$ сходится вместе с соответствующими производными к функции $u(t, x, z) \in C_{t,x,z}^{0,2,2}(G_{[0,T]}) \cap C_{t,x,z}^{0,0,4}(G_{[0,T]})$, которая на основании теоремы сходимости метода слабой аппроксимации является решением прямой задачи (9), (10).

$$C_{t,x,z}^{1,k_1,k_2}(G_{[0,T]}) = \left\{ u(t, x, z) \mid u_t, \frac{\partial^m}{\partial z_m} D_x^\alpha u \in C(G_{[0,T]}), \right.$$

$$\left. m = 0, 1, \dots, k_2; |\alpha| \leq k_1 \right\}.$$

Для функции $u(t, x, z)$ доказано выполнение условия переопределения (3). Это необходимо для того, чтобы решение прямой задачи было решением исходной обратной задачи.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (4)–(8). Тогда существует решение $u(t, x, z)$, $\lambda(t, x)$ задачи (1)–(3) в классе $Z_{[0,T]}$, удовлетворяющее соотношению*

$$\sum_{k=0}^4 \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} u \right| + \sum_{k=0}^2 \sum_{1 \leq |\alpha| \leq 2} \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\alpha u \right| + \sum_{|\alpha| \leq 2} |D_x^\alpha \lambda(t, x)| \leq C, \quad (t, x, z) \in G_{[0,T]},$$

$$(14)$$

Здесь

$$Z_{[0,T]} = \left\{ u(t, x, z), \lambda(t, x) \mid u \in C_{t,x,z}^{1,2,2} \cap C_{t,x,z}^{0,0,4}(G_{[0,T]}), \lambda(t, x) \in C(\Pi_{[0,T]}) \right\},$$

Единственность доказывается стандартным образом путем доказательства тождественного равенства нулю разности двух возможных решений.

Теорема 2 *Решение $u(t, x, z)$, $\lambda(t, x)$ задачи (1)–(3), удовлетворяющее соотношению (14), единственно в классе $Z_{[0,T]}$.*

Из теорем 1, 2 следует

Теорема 3 *Пусть выполняются условия (4)–(8). Тогда существует и единствено решение $u(t, x, z)$, $\lambda(t, x)$ задачи (1)–(3) в классе $Z_{[0,T]}$, удовлетворяющее соотношению (14).*

Список литературы

- [1] Yu.Ya. Belov, T.N. Shipina. *The problem of determining of source function for a system of composite type, J.Inv.Ill-Posed Problems*, 1998, V. 6, №4.
- [2] О.А. Афиногенова, Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков. *О стабилизации решения задачи идентификации функции источника одномерного параболического уравнения, ДАН*, 2009, Т.424, № 4, с.439–441.
- [3] Ю.Я. Белов, С.А. Кантор. *Метод слабой аппроксимации, КрасГУ*, 1999, 236 с.
- [4] Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков. *О задаче идентификации двух коэффициентов параболического полулинейного уравнения с условиями переопределения, заданными на гладкой кривой, Спец. выпуск журнала "Вычислительные технологии", Спец. выпуск журнала "Вычислительные технологии", посвященный 85-летию академика Н.Н. Яненко*, 2006, Т.11, ч.1, с.46-54.
- [5] А.С. Майнагашева, И.В. Фроленков. *Об одной задаче идентификации функции источника многомерного параболического уравнения, VI Всесибирский конгресс женщин-математиков: Материалы Всероссийской конференции, 15-17 января 2010 г., Красноярск, РИЦ СибГТУ*, 2010, с.268-271.
- [6] Р.В. Сорокин. *О стабилизации решения одной обратной задачи для системы составного типа, Вестник Красноярского государственного университета, серия "Физико-математические науки"*, №1, 2005 г, с.167-178.
- [7] Н.Н. Яненко *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосибирск, 1967, 195с.*

ДВУХСЛОЙНАЯ МОДЕЛЬ ВЕРТИКАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МЕТАНА В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ (НА ПРИМЕРЕ ХАНТЫ-МАНСИЙСКОГО АВТОНОМНОГО ОКРУГА)

А.А. Мартынова

Сибирский федеральный университет, Институт математики
Научный руководитель — д.ф.-м.н. В.М. Белолипецкий

Вертикальное распределение парниковых газов и оценки их эмиссии с заданных территорий определяются на основе трехмерных моделей.

Для описания вертикальных распределений парниковых газов над стационарными источниками предполагается упрощенная стационарная двухслойная модель.

Трехмерная модель

Трехмерная модель описывается на основании уравнений переноса и диффузии [3]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \operatorname{div}(C \cdot \bar{V}) = \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial C}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} K \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K \frac{\partial C}{\partial y} + f. \quad (1)$$

Здесь t — время, x, y, z — прямоугольные координаты, ось z направлена вверх, C — концентрация рассматриваемого вещества, $\bar{V} = (u, v, w)$ — скорость ветра, K_z — коэффициент вертикального турбулентного обмена, K — коэффициент горизонтального турбулентного обмена, f — внутренние источники (или стоки).

Задача рассматривается в области $G = S \times [0, H]$, где H — верхняя граница расчетной области, $S = [0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y]$.

Границные условия.

На входной границе (Γ_1), где ветер направлен внутрь области,

$$C|_{\Gamma_1} = C_1. \quad (2)$$

На границе (Γ_2), где ветер направлен из области G , ставится условие

$$\left. \frac{\partial C}{\partial n} \right|_{\Gamma_2} = 0. \quad (3)$$

На верхней границе ($z = H$) задается фоновое значение

$$C|_{z=H} = C_H. \quad (4)$$

На нижней границе $z = 0$ задается поток вещества (эмиссия или поглощение газовых компонент)

$$\left. K_z \frac{\partial C}{\partial z} \right|_{z=0} = -Q_C. \quad (5)$$

(Здесь $Q_C < 0$ - при поглощении, $Q_C > 0$ - при эмиссии).

При решении нестационарной задачи необходимо задать начальное условие:

$$C|_{t=0} = C^0(x, y, z). \quad (6)$$

Предполагается, что поля скоростей движения воздушных масс известны.

Упрощенная одномерная модель

Введем осредненные по горизонтальной площади S концентрации вещества:

$$\hat{C} = \frac{1}{S} \int_S C dS. \quad (7)$$

Проинтегрируем уравнение (1) по площади S , пренебрегая вертикальным переносом, внутренними источниками и используя формулу Гаусса-Остроградского, получаем [2]

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial \hat{C}}{\partial z} + R, \quad (8)$$

где

$$R = \frac{1}{S} \left[\int_{\Gamma} \left(K \frac{\partial C}{\partial n} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma} C V_n d\Gamma \right]. \quad (9)$$

Начальное условие для уравнения (8) находится из условия (6)

$$\hat{C}|_{t=0} = \hat{C}^0(z) = \frac{1}{S} \int_S C^0 dS. \quad (10)$$

Из (4) и (5) определяются граничные условия для уравнения (8):

$$\hat{C}|_{z=H} = \hat{C}_H = \frac{1}{S} \int_S C_H dS. \quad (11)$$

$$K_z \frac{\partial \hat{C}}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\frac{1}{S} \int_S Q_C dS = -\hat{Q}_C. \quad (12)$$

Предполагается, что зависимость C от горизонтальной координаты близка к линейной. Тогда уравнение (8) приводится к виду:

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial \hat{C}}{\partial z} - \frac{2u}{L} \hat{C} + \frac{2u}{L} C_1, \quad (13)$$

$$\hat{C}|_{t=0} = \hat{C}^0(z), \quad K_z \frac{\partial \hat{C}}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\hat{Q}_C, \quad \hat{C}|_{z=H} = \hat{C}_H, \quad (14)$$

где $C_1 = C_1(z)$ – известная функция, u – скорость ветра, L – характерный горизонтальный масштаб.

Упрощенная двухслойная стационарная задача:

$$\frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial \hat{C}}{\partial z} - \lambda \hat{C} = -\lambda C_1, \quad \lambda = \frac{2u_L}{L}, \quad (15)$$

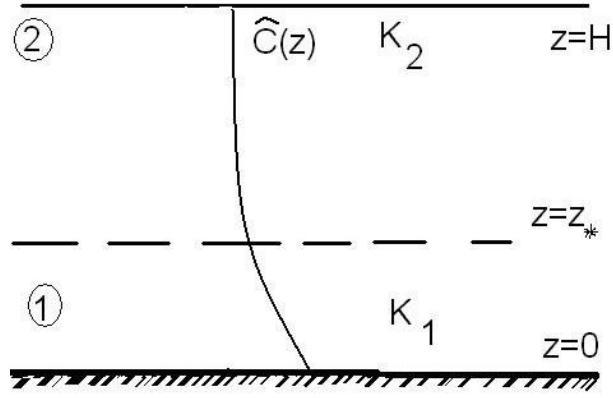


Рис. 1: Двухслойная схема приземного слоя атмосферы

$$K_z \frac{\partial \hat{C}}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\hat{Q}_C, \quad \hat{C} \Big|_{z=H} = \hat{C}_H. \quad (16)$$

Рассмотрим простейший случай параметризации коэффициента турбулентной диффузии в виде:

$$K_z = \begin{cases} K_1, & 0 \leq z < z_* \\ K_2, & z_* < z \leq H. \end{cases} \quad (17)$$

Задача (15-17) сводится к двум задачам:

$$\frac{d^2 \hat{C}_1}{dz^2} - a_1 \hat{C}_1 = -a_1 C_1, \text{ при } 0 \leq z < z_*, \quad a_1 = \frac{2u}{L \cdot K_1} \quad (18)$$

$$\frac{d^2 \hat{C}_2}{dz^2} - a_2 \hat{C}_2 = -a_2 C_1, \text{ при } z_* < z \leq H, \quad a_2 = \frac{2u}{L \cdot K_2}. \quad (19)$$

Границные условия:

$$K_2 \frac{d \hat{C}_1}{dz} \Big|_{z=0} = -Q_C, \quad (20)$$

$$\hat{C}_2 \Big|_{z=H} = \hat{C}_H, \quad (21)$$

$$\hat{C}_1 \Big|_{z=z_*} = \hat{C}_2 \Big|_{z=z_*}, \quad K_1 \frac{d \hat{C}_1}{dz} = K_2 \frac{d \hat{C}_2}{dz}. \quad (22)$$

Решения уравнений (18) и (19) имеют вид:

$$\hat{C}_1 = A_1 e^{\sqrt{a_1} \cdot z} + A_2 e^{-\sqrt{a_1} \cdot z} + \frac{\sqrt{a_1}}{2} e^{-\sqrt{a_1} \cdot z} \int_0^z e^{\sqrt{a_1} \cdot z} C_1(z) dz - \quad (23)$$

$$-\frac{\sqrt{a_1}}{2} e^{\sqrt{a_1} \cdot z} \int_0^z e^{-\sqrt{a_1} \cdot z} C_1(z) dz.$$

В области «2» перейдем к переменной $\zeta = z - z_*$, $H_* = H - z_*$, $0 \leq \zeta \leq H_*$:

$$\begin{aligned}\hat{C}_2 &= A_3 e^{\sqrt{a_2} \cdot \zeta} + A_4 e^{-\sqrt{a_2} \cdot \zeta} + \frac{\sqrt{a_2}}{2} e^{-\sqrt{a_2} \cdot \zeta} \int_0^\zeta e^{\sqrt{a_2} \cdot \zeta} C_1(\zeta) d\zeta - \\ &\quad - \frac{\sqrt{a_2}}{2} e^{\sqrt{a_2} \cdot \zeta} \int_0^\zeta e^{-\sqrt{a_2} \cdot \zeta} C_1(\zeta) d\zeta.\end{aligned}\quad (24)$$

Постоянные A_1, A_2, A_3, A_4 определяются из системы линейных алгебраических уравнений, полученных из граничных условий (20)-(22).

Параметризация коэффициента вертикального турбулентного обмена

Для оценки коэффициента вертикального турбулентного обмена (K_z) в приземном слое атмосферы применяется формула Прандтля-Кармана, логарифмический профиль скорости ветра [1]. Тогда K_z определяется по формуле:

$$K_z(z) = \begin{cases} 0,1681 \cdot B(z + z_0), & \text{при } 0 \leq z \leq \delta_* \\ 0,089^2 \cdot \delta^2 \cdot B/(z + z_0), & \text{при } \delta_* \leq z \leq H, \end{cases} \quad (25)$$

где $B = W_2 / \ln \frac{z_2 + z_0}{z_0}$, $\delta = 1164 \frac{B}{\sin \varphi}$, $\delta_* = 0,217 \cdot \delta$, δ —толщина пограничного слоя атмосферы, z_0 —параметр шероховатости, φ —широта.

Для двухслойной модели:

$$K_1 = \frac{1}{z_*} \int_0^{z_*} K_z dz; \quad K_2 = \frac{1}{H - z_*} \int_{z_*}^H K_z dz. \quad (26)$$

Примеры расчетов

В работе [3] приводятся вертикальные распределения метана вблизи поверхности земли в Ханты-Мансийском автономном округе.

На рис. 2 приведено вертикальное распределение метана в районе г. Ханты-Мансийска, вычисленное по двухслойной модели при $K_1 = 20 \text{ м}^2/\text{с}$, $K_2 = 3 \text{ м}^2/\text{с}$, $Q_C = 0,00434 \text{ мг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$, \boxtimes — измеренные данные, $- \Delta -$ — расчетные данные.

Предложенная двухслойная модель позволяет определить вертикальные распределения метана над стационарными источниками в зависимости от интенсивности источника и концентрации метана на входной границе.



Рис. 2: Вертикальные распределения концентрации $C(\text{мг}/\text{м}^3)$

Список литературы

- [1] Д. Андерсон, Дж. Таннхилл, Р. Плетчер. *Вычислительная гидромеханика и теплообмен: Т.1. - М.: Мир, 1990. 384 с.*
- [2] В.М. Белолипецкий, П.В. Белолипецкий, А.Г. Дегерменджи. Одномерная модель вертикального распределения углерода в атмосфере // Сибирский экологический журнал.-2004. Т. 11, № 5. С. 789-792.
- [3] С.В. Яговкина, И.Л. Кароль, В.А. Зубов и др. Метеорология и гидрология, 2003, № 4, 49-62.

ЗАДАЧА РАНЖИРОВАНИЯ БАНКОВ ПО ПОКАЗАТЕЛЯМ ИХ ФИНАНСОВОГО СОСТОЯНИЯ

Е.С. Моисейченко

Сибирский федеральный университет, Институт математики
Научный руководитель — к.ф.-м.н. И.В. Баранова

В работе решается задача ранжирования банков по показателям их финансового положения. Банковская система представляет собой сложную систему, элементами которой являются банки. Финансовое положение и репутация каждого банка характеризуется множеством показателей, одни из которых являются числовыми, а другие — множественными. Для решения различных задач системного анализа сложных систем, поведение которых описывается числовыми и множественными данными, Барановой И .В. был предложен метод двудольных множеств событий. Основная идея ме-

тода заключается в представлении любой сложной системы с помощью двудольной эвентологической модели, в которой каждый элемент системы характеризуется двудольным множеством событий: его первая доля определяется случайными величинами, а вторая - случайными множествами событий. Затем анализ поведения элементов системы сводится к анализу эвентологических распределений соответствующих им двудольных множеств событий. Решение задачи ранжирования банков с помощью метода двудольных множеств событий заключается в нахождении расстояния между идеальными и реальными банками на основе эвентологических распределений двудольных множеств событий, соответствующих банкам, и их ранжировании на основе полученных значений расстояния. В качестве расстояния между двудольными множествами используется сет-операция симметрической разности по Минковскому.

Задача основана на реальных статистических данных. Ранжирование проведено для шести российских банков:

- Банк Москвы;
- Сбербанк;
- Росбанк;
- Альфа-Банк;
- Газпромбанк;
- Промсвязьбанк.

Статистика была собрана на официальных сайтах банков России. В ней рассмотрены 27 финансовых показателей, 26 из которых — числовые (денежные средства, средства кредитных организаций в ЦБ РФ, обязательные резервы, чистые вложения в ценные бумаги, основные средства, нематериальные активы и материальные запасы, средства акционеров, эмиссионный доход, комиссионный доход, средства в кредитных организациях, вклады физических лиц, процентные и чистые доходы по различным операциям и др.), и один множественный показатель — множество кредитов, предоставляемых банком. Период наблюдений — с 2003 по 2008 год.

Определение Двудольное множество случайных событий представляет собой объединение двух множеств — множества событий, которое определяется случайными величинами, и множества событий, которое определяется случайными множествами событий:

$$\{\mathcal{Y}, \mathfrak{X}\} = \{\mathcal{Y}_\alpha, \mathfrak{X}_\beta, \alpha \in A, \beta \in B\}.$$

Определение Двудольной эвентологической моделью сложной системы будем называть такую систему, для которой поведение каждого элемента характеризуется двудольным множеством случайных событий $\{\mathcal{Y}, \mathfrak{X}\}$, его первая доля \mathcal{Y} , определяется случайными величинами ξ , а вторая доля \mathfrak{X} - случайными множествами событий \mathbf{K} .

Определение Произвольной сет-операцией по Минковскому над двумя двудольными множествами событий s^1 и s^2 называется теоретико-множественная операция, которая представляется как множество событий, полученных с помощью операций по Минковскому над соответствующими событиями из каждой доли.

$$\begin{aligned} s^1(\mathcal{O})s^2 &= \{\mathcal{Y}_a^1(\mathcal{O})\mathcal{Y}_a^2, \mathfrak{X}_\beta^1(\mathcal{O})\mathfrak{X}_\beta^2, a \in A, \beta \in B\} = \\ &= \{\mathcal{Y}_a^1(\mathcal{O})\mathcal{Y}_a^2, \mathfrak{X}_\beta^1(\mathcal{O})\mathfrak{X}_\beta^2, X_\beta \subseteq \mathfrak{X}_\beta, r_a \in R_a, a \in A, \beta \in B\}. \end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{Y}_a^1, \mathcal{Y}_a^2 \subseteq \mathcal{Y}_a$, $\mathfrak{X}_\beta^1, \mathfrak{X}_\beta^2 \subseteq \mathfrak{X}_\beta$. Вероятность произвольной операции

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(s^1(\mathcal{O})s^2) &= \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \frac{1}{|\mathcal{Y}_a|} \sum_{r_a \in R_a} \mathbf{P}(\mathcal{Y}_a^1(r_a)(\mathcal{O})\mathcal{Y}_a^2(r_a)) + \\ &\quad + \frac{1}{|B|} \sum_{\beta \in B} \frac{1}{|\mathfrak{X}_\beta|} \sum_{X_\beta \subseteq \mathfrak{X}_\beta} \mathbf{P}(X_\beta^1(\mathcal{O})X_\beta^2). \end{aligned}$$

Представим банковскую систему с помощью двудольной эвентологической модели, в которой финансовое состояние каждого банка характеризуется двудольным множеством случайных событий:

$$s^1 = \{\mathcal{Y}_a^1, \mathfrak{X}_\beta^1, a \in A, \beta \in B\}, \dots, s^6 = \{\mathcal{Y}_a^6, \mathfrak{X}_\beta^6, a \in A, \beta \in B\}.$$

Введем понятие идеального „наилучшего“ банка, которое представляет собой наилучшие значения для всех показателей финансового состояния банка.

$$s^+ = \{\mathcal{Y}_a^+, \mathfrak{X}_\beta^+, a \in A, \beta \in B\}.$$

Э-распределения для реальных банков оцениваются из статистики. Э-распределения идеальных банков оцениваются экспертом. Тогда решение задачи ранжирования находится с помощью сет-операции симметрической разности по Минковскому между каждым двудольным множеством, соответствующим реальному банку и двудольным множеством, соответствующим идеальному банку, по следующей формуле:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(s^+(\Delta)s^i) &= \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \frac{1}{|\mathcal{Y}_a|} \sum_{r_a \in R_a} \mathbf{P}(\mathcal{Y}_a^+(r_a)(\Delta)\mathcal{Y}_a^i(r_a)) + \\ &\quad + \frac{1}{|B|} \sum_{\beta \in B} \frac{1}{|\mathfrak{X}_\beta|} \sum_{X_\beta \subseteq \mathfrak{X}_\beta} \mathbf{P}(X_\beta^+(\Delta)X_\beta^i). \end{aligned}$$

Чем меньше полученное расстояние, тем ближе банк к идеальному „наилучшему“, и тем выше у него ранг. Банкам, у которых значение расстояния одинаково, будет присвоен один и тот же ранг. Полученные результаты ранжирования шести банков приведены в таблице 1.

Банк	Вероятность	Ранг
Сбербанк	0,1075	1
Газпромбанк	0,1669	2
Альфа-Банк	0,1718	3
Банк Москвы	0,1733	4
Росбанк	0,1770	5
Промсвязьбанк	0,2024	6

Таблица 1: Ранжирование шести банков по 27 финансовым показателям.

Как видно из таблицы наилучшим банком из представленных является Сбербанк, поскольку эвентологическое распределение его показателей наиболее близко к идеальному, а наихудшим является Промсвязьбанк.

Список литературы

- [1] И.В. Баранова. *Метод двудольных множеств событий в эвентологическом анализе социально-экономических систем*, Вестник Красноярского государственного университета: физико-математические науки: КрасГУ, 2006.
- [2] О.Ю. Воробьев. *Метод двудольных множеств событий в эвентологическом анализе сложных систем*, Институт естественных и гуманитарных наук, 2007.
- [3] О.Ю. Воробьев. Эвентология, Сибирский федеральный университет, 2007.

О ПРЯМОЙ ЭВЕНТОЛОГИЕСКОЙ ЗАДАЧЕ МАРКОВИЦА ДЛЯ НЕЧЕТКИХ СОБЫТИЙ

Я.В. Нартов

Сибирский федеральный университет, Институт математики
Научный руководитель — к.ф.-м.н. А.М. Семенова

В работе рассматривается прямая нечеткая эвентологическая задача Марковица. Предложен метод построения нечеткой эвентологической пули методом Монте-Карло.

Основные определения

Прямая эвентологическая задача Марковица В работах [1,2] были сформулированы прямая и обратная эвентологические задачи Марковица и предложены методы их решения.

Рассмотрим множество случайных событий $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$, выбранных из алгебры вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Произвольное эвентологическое распределение (\mathcal{E} -распределение) множества избранных случайных событий $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{F}$ можно представить несколькими эквивалентными распределениями вероятностей событий-террасок [1], в частности:

$$p(X) = \mathbf{P}(\text{ter}(X)) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x \bigcap_{x \in X^c} x^c\right)$$

— *Э-распределение вероятностей I-го рода*;

$$p_X = \mathbf{P}(\text{ter}_X) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{x \in X} x\right) = \mathbf{P}(X)$$

— *Э-распределение вероятностей II-го рода*. Каждое из этих распределений вероятностей событий-террасок замечательно тем, что его одного достаточно для полного определения эвентологического распределения множества случайных событий \mathfrak{X} .

С каждым случайным событием $x \in \mathfrak{X}$ однозначно связан его индикатор $\mathbf{1}_x(\omega)$, который является случайной величиной с математическим ожиданием равным вероятности события x и дисперсией, равной произведению вероятности события x на вероятность события x^c [1]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{1}_x(\omega)) = \mathbf{P}(x), \quad \mathbf{D}(\mathbf{1}_x(\omega)) = \mathbf{P}(x)\mathbf{P}(x^c).$$

Рассмотрим также $(\mathfrak{X}, 2^\mathfrak{X}, \mathbf{a})$ — измеримое пространство с нормированной единицей мерой \mathbf{a} , определенной на множества всех подмножеств \mathfrak{X} . На каждом подмножестве $X \subseteq \mathfrak{X}$ мера a определяется только своими значениями на моноплетах $\{x\} \subseteq \mathfrak{X}$ по формуле:

$$a(X) = \sum_{x \in X} a(\{x\}) = \sum_{x \in X} a(x),$$

и удовлетворяет нормировочному соотношению

$$a(\mathfrak{X}) = \sum_{x \in \mathfrak{X}} a(x) = 1.$$

Значения этой нормированной меры на моноплетах образуют вектор $\mathbf{a} = \{a(x), x \in \mathfrak{X}\}$ интерпретируется [1,2] как «неотрицательные доли единичного веса, распределенные между событиями $x \in \mathfrak{X}$ ».

Рассмотрим случайную величину $\mathbf{1}_X$ на Ω , значениями которой служат $a(X)$ – значения меры a на подмножествах $X \subseteq \mathfrak{X}$, которые $\mathbf{1}_X$ принимает с соответствующими вероятностями $p(X)$, $X \subseteq \mathfrak{X}$ Э-распределения \mathbf{p} .

Прямая эвентологическая задача Марковица. Для заданного Э-распределения $\mathbf{p} = \{p(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}$ найти меру a^* , значения которой на моноплетах $\mathbf{a}^* = \{a^*(x), x \in \mathfrak{X}\}$ минимизирует дисперсию случайной величины $\mathbf{1}_{\mathfrak{X}}$ при фиксированном значении ее математического ожидания:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\mathfrak{X}}) = \sum_{x \in \mathfrak{X}} a(x) \mathbf{P}(x) = \langle a \rangle; \\ \mathbf{D}(\mathbf{1}_{\mathfrak{X}}) = \sum_{x \in \mathfrak{X}} \sum_{y \in \mathfrak{X}} a(x)a(y) \mathbf{Kov}_{xy} \rightarrow \min_{\mathbf{a}}; \\ \sum_{x \in \mathfrak{X}} a(x) = 1, \end{array} \right.$$

где $\mathbf{Kov}_{xy} = \mathbf{P}(x \cap y) - \mathbf{P}(x)\mathbf{P}(y)$ – парная ковариация событий $x, y \in \mathfrak{X}$, а $\mathbf{P}(x)$ – классическая вероятность события x из \mathfrak{X} .

В [2] рассмотрены некоторые методы решения этой задачи.

Теория нечетких событий

Рассмотрим некий нечеткий эксперимент, в котором участвуют агенты из конечного множества \mathfrak{M} , которые характеризуют термы (имена) из множества \mathfrak{X} .

Определим матрицу избранных случайных событий [1] как множество событий $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}} = \{x_{\mu}, x \in \mathfrak{X}, \mu \in \mathfrak{M}\}$, где x_{μ} – измеримые относительно алгебры \mathcal{F} случайные события. Таким образом, каждая пара $(x, \mu) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{M}$ определяет одно случайное событие, наступление которого агенты μ связывают с именем x .

Множества элементов “строк” матрицы избранных событий $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$ определяют \mathfrak{M} -нечеткие события $\tilde{x} = \{x_{\mu}, \mu \in \mathfrak{M}\}$, образующие множество $\tilde{\mathfrak{X}} = \{\tilde{x}, x \in \mathfrak{X}\}$, а множества элементов “столбцов” – \mathfrak{X} -нечеткие события $\tilde{\mu} = \{x_{\mu}, x \in \mathfrak{X}\}$, образующие множество $\tilde{\mathfrak{M}} = \{\tilde{\mu}, \mu \in \mathfrak{M}\}$.

\mathfrak{M} -нечеткое событие \tilde{x} математически описывает взгляд общества (множества агентов) \mathfrak{M} на некоторое событие с именем x . \mathfrak{X} -нечеткое событие $\tilde{\mu}$ математически описывает суждение агента μ о множестве событий \mathfrak{X} .

В дальнейшем мы будем говорить о нечетких событиях \tilde{x} из множества $\tilde{\mathfrak{X}}$. Для множества нечетких событий $\tilde{\mathfrak{M}}$ выкладки и рассуждения проводятся аналогично.

Приведем перечень основных определений колмогоровской аксиоматики, перенесенных по аналогии в эвентологию нечетких событий [1].

\mathfrak{M} -нечеткое элементарное событие (\mathcal{E} -событие) — это $|\mathfrak{M}|$ -множество $\tilde{\omega} = \{\omega_\mu, \mu \in \mathfrak{M}\}$, состоящее из \mathcal{F} -измеримых событий $\omega_\mu \subseteq \Omega$, каждое из которых наступает, когда наступает $\omega \in \Omega$, и представляет собой одно из событий-террасок

$$\text{ter}_\mu(X_\mu) = \bigcap_{x \in X} x_\mu \bigcap_{x \in X^c} x_\mu^c, \quad X_\mu \subseteq \mathfrak{X}, \quad (1)$$

порожденных множеством событий $\tilde{\mu} = \{x_\mu, x \in \mathfrak{X}\}$:

$$\omega_\mu = \begin{cases} \text{ter}_\mu(\emptyset), & \omega \in \text{ter}_\mu(\emptyset), \\ \dots, & \dots, \\ \text{ter}_\mu(X_\mu), & \omega \in \text{ter}_\mu(X_\mu), \emptyset \subset X_\mu \subset \mathfrak{X}, \\ \dots, & \dots, \\ \text{ter}_\mu(\mathfrak{X}), & \omega \in \text{ter}_\mu(\mathfrak{X}), \end{cases}$$

в которое попадает наступившее $\omega \in \Omega$.

Пространство элементарных \mathfrak{M} -нечетких событий — это $|\mathfrak{M}|$ -множество $\tilde{\Omega} = \{\Omega, \mu \in \mathfrak{M}\} = \underbrace{\{\Omega, \dots, \Omega\}}_{|\mathfrak{M}|}$, состоящее из одного и того же пространства элементарных событий Ω .

Достоверное \mathfrak{M} -нечеткое событие — это $|\mathfrak{M}|$ -множество $\tilde{\Omega} = \{\Omega, \mu \in \mathfrak{M}\} = \underbrace{\{\Omega, \dots, \Omega\}}_{|\mathfrak{M}|}$, состоящее из одного и того же достоверного события Ω .

Невозможное \mathfrak{M} -нечеткое событие — это $|\mathfrak{M}|$ -множество $\tilde{\emptyset} = \{\emptyset, \mu \in \mathfrak{M}\} = \underbrace{\{\emptyset, \dots, \emptyset\}}_{|\mathfrak{M}|}$, состоящее из одного и того же невозможного события \emptyset .

Алгебра \mathfrak{M} -нечетких событий — это $|\mathfrak{M}|$ -множество $\tilde{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}_\mu, \mu \in \mathfrak{M}\}$, состоящее из алгебр обычных событий.

\mathfrak{M} -нечеткое событие — это $|\mathfrak{M}|$ -множество, состоящее из $\tilde{\mathcal{F}}$ -измеримых событий: $\tilde{x} = \{x_\mu, \mu \in \mathfrak{M}\}$, где $x_\mu \subseteq \Omega$.

Измеримое пространство \mathfrak{M} -нечетких событий — это $|\mathfrak{M}|$ -множество $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}) = \{(\Omega, \mathcal{F}_\mu), \mu \in \mathfrak{M}\}$, состоящее из измеримых пространств событий.

Вероятность \mathcal{F} -измеримого \mathfrak{M} -нечеткого события \tilde{x} (\in) \mathcal{F} определяется по формуле:

$$\mathbf{P}(\tilde{x}) = \frac{1}{|\mathfrak{M}|} \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \mathbf{P}(x_\mu). \quad (2)$$

Эвентология определяет нечеткое событие как множество “обычных” колмгородских событий и предлагает метод построения эвентологической функции принадлежности нечеткого события как среднего индикаторов

событий его составляющих:

$$\mathbf{1}_{\tilde{x}}(\omega) = \frac{1}{|\mathfrak{M}|} \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \mathbf{1}_{x_\mu}(\omega), \quad (3)$$

где $\mathbf{1}_{x_\mu}(\omega)$ – индикаторы “обычных” событий x_μ , которые составляют множества событий \tilde{x} .

Прямая эвентологическая задача Марковица для нечетких событий Будем рассматривать \mathfrak{M} -нечеткую задачу, так как \mathfrak{X} -нечеткая задача ставится путем схожих размышлений.

Вероятностное пространство \mathfrak{M} -нечетких событий — это $|\mathfrak{M}|$ -множество

$$(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \mathbf{P}) = \{(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mathbf{P}), \mu \in \mathfrak{M}\},$$

состоящее из вероятностных пространств обычных событий, отличающихся только алгебрами событий \mathcal{F}_μ , $\mu \in \mathfrak{M}$.

Э-распределением множества \mathfrak{M} -нечетких событий $\tilde{\mathfrak{X}}$ называется множество вероятностей \mathfrak{M} -нечетких событий $\{\tilde{p}(X), X \in \mathfrak{X}\}$:

$$\tilde{p}(X) = \frac{1}{|\mathfrak{M}|} \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} p_\mu(X),$$

где $\{p_\mu(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}$ — Э-распределение множества обычных событий $\mathfrak{X}_\mu = \{x_\mu, x \in \mathfrak{X}\}$.

Ковариация множества нечетких событий \tilde{X} относительно вероятности \mathbf{P} определяется как

$$\begin{aligned} \tilde{\text{Kov}}_X &= \mathbf{P} \left(\left(\bigcap_{x \in X} \right) \tilde{x} \left(\bigcap_{x \in X^c} \right) \tilde{x}^c \right) - \\ &\quad - \mathbf{P}^i \left(\left(\bigcap_{x \in X} \right) \tilde{x} \left(\bigcap_{x \in X^c} \right) \tilde{x}^c \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\mathbf{P}^i \left(\left(\bigcap_{x \in X} \right) \tilde{x} \left(\bigcap_{x \in X^c} \right) \tilde{x}^c \right) = \frac{1}{|\mathfrak{M}|} \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \prod_{x \in \mathfrak{X}} \mathbf{P}(x_\mu).$$

Введем измеримое пространство

$$(\tilde{\mathfrak{X}}, 2^{\tilde{\mathfrak{X}}}, a) = \{(\mathfrak{X}_\mu, 2^{\mathfrak{X}_\mu}, a), \mu \in \mathfrak{M}\},$$

где a — мера, нормированная единицей. Действие a на \mathfrak{M} -нечеткое подмножество \tilde{x} множества выбранных \mathfrak{M} -нечетких событий \mathfrak{X} определяется следующим образом:

$$a(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{x} \in \tilde{\mathfrak{X}}} a(\tilde{x}) = \frac{1}{|\mathfrak{M}|} \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \sum_{x \in X} a(x_\mu). \quad (5)$$

Рассмотрим случайную величину $F(\omega)$, определяемую следующим соотношением

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \sum_{\tilde{x} \in \tilde{\mathfrak{X}}} a(\tilde{x}) \mathbf{1}_{\tilde{x}}(\omega) = \\ &= \frac{1}{|\mathfrak{M}|} \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \sum_{x \in \mathfrak{X}} a(x_\mu) \mathbf{1}_{x_\mu}(\omega). \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда математическое ожидание и дисперсия $F(\omega)$ равны соответственно [2]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{|\mathfrak{M}|^2} \sum_{x \in \mathfrak{X}} \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \sum_{\nu \in \mathfrak{M}} a(x_\mu) \mathbf{P}(x_\nu); \\ \mathbf{D} &= \frac{1}{|\mathfrak{M}|^4} \sum_{x, y \in \mathfrak{X}} \sum_{\mu, \nu \in \mathfrak{M}} \sum_{\eta, \gamma \in \mathfrak{M}} a(x_\mu) a(y_\nu) \tilde{\text{Kov}}_{x_\eta y_\gamma}. \end{aligned} \quad (7)$$

Впервые \mathfrak{M} -нечеткая прямая Э-задача Марковица была поставлена в [2].

М-нечеткая прямая Э-задача Марковица. Для заданного Э-распределения $\tilde{p}(X)$ множества \mathfrak{M} -нечетких событий $\tilde{\mathfrak{X}}$ найти вектор $\tilde{\mathbf{a}} = \{a(\tilde{x}), \tilde{x} \in \tilde{\mathfrak{X}}\}$ такой, что:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\tilde{x} \in \tilde{\mathfrak{X}}} \sum_{\tilde{y} \in \tilde{\mathfrak{X}}} a(\tilde{x}) a(\tilde{y}) \tilde{\text{Kov}}_{xy} \rightarrow \min_{\tilde{\mathbf{a}}}, \\ \sum_{\tilde{x} \in \tilde{\mathfrak{X}}} a(\tilde{x}) \mathbf{P}(\tilde{x}) = \langle a \rangle, \\ \sum_{\tilde{x} \in \tilde{\mathfrak{X}}} a(\tilde{x}) = 1. \end{array} \right. \quad (8)$$

Используя (2), (4), (5) задачу (8) можно переписать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{|\mathfrak{M}|^4} \sum_{x, y \in \mathfrak{X}} \sum_{\mu, \nu \in \mathfrak{M}} \sum_{\eta, \gamma \in \mathfrak{M}} a(x_\mu) a(y_\nu) \tilde{\text{Kov}}_{x_\eta y_\gamma} \right) \rightarrow \min_{\tilde{\mathbf{a}}}; \\ \frac{1}{|\mathfrak{M}|^2} \sum_{x \in \mathfrak{X}} \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \sum_{\nu \in \mathfrak{M}} a(x_\mu) \mathbf{P}(x_\nu) = \langle a \rangle; \\ \frac{1}{|\mathfrak{M}|} \sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \sum_{x \in \mathfrak{X}} a(x_\mu) = 1. \end{array} \right.$$

Рассмотрим метод Монте-Карло для решения задачи (8).

Метод Монте-Карло для нечеткой прямой Э-задачи Марковица

Проиллюстрируем принцип решения методом Монте-Карло прямой Э-задачи Марковица.

Пусть известно Э-распределение $\mathbf{p} = \{p(X), X \subseteq \mathfrak{X}\}$ множества избранных событий \mathfrak{X} . Решение выбирается из множества точек двумерной критериальной плоскости (\mathbf{D}, \mathbf{E}) .

Обозначим $\Delta_{\mathfrak{X}}$ – симплекс размерности $|\mathfrak{X}|$ и рассмотрим отображение

$$Q : \Delta_{\mathfrak{X}} \rightarrow \Re^2,$$

которое каждому значению меры $\mathbf{a} \in \Delta_{\mathfrak{X}}$ ставит в соответствие точку $((\mathbf{D}(\mathbf{1}_{\mathfrak{X}}), \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\mathfrak{X}}))) \in \Re^2$. Множество полученных образов $((\mathbf{D}(\mathbf{1}_{\mathfrak{X}}), \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\mathfrak{X}})))$ образует критериальное множество, называемое эвентологической пулей (Э-пулей). Решением Э-задачи будет верхняя граница Э-пули.

Посмотрим на матрицу избранных событий $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$ как на обычное множество избранных событий из алгебры \mathcal{F} вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Э-распределение \mathbf{q} множества событий $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$ определяется набором из $2^{|\mathfrak{X}| \cdot |\mathfrak{M}|}$ вероятностей

$$q(X_W) = \mathbf{P}(\text{ter}(X_W)), \quad X \subseteq \mathfrak{X}, W \subseteq \mathfrak{M},$$

где $\text{ter}(X_W) = \bigcap_{x \in X_W} x \bigcap_{x \in X_W^c} x^c$ – обычное событие-терраска.

Изложенный выше принцип распространяется и на построение нечеткой Э-пули. В данном случае отображение Q строится согласно формулам (7).

С другой стороны, \mathfrak{M} -нечеткое событие определяется как множество обычных колмогоровских событий $\tilde{x} = \{x_{\mu}, \mu \in \mathfrak{M}\}$ и является подмножеством множества $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$, т.е. $\tilde{x} \subseteq \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$.

Если известно Э-распределение множества событий $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$, то распределение множества событий \tilde{x} , $x \in \mathfrak{X}$, можно определить по формуле

$$p(x_W // \tilde{x}) = \sum_{Z \subseteq \tilde{x}^c} q(x_W + Z), \quad W \subseteq \mathfrak{M}, \quad (9)$$

а распределение \mathfrak{X} -нечеткого события $\tilde{\mu}$, $\mu \in \mathfrak{M}$, можно определить по формуле

$$p(X_{\mu} // \tilde{\mu}) = \sum_{Z \subseteq \tilde{\mu}^c} q(X_{\mu} + Z), \quad X \subseteq \mathfrak{X}. \quad (10)$$

Таким образом для любого нечеткого события \tilde{x} мы можем решать прямую Э-задачу Марковица. Следовательно решение \mathfrak{M} -нечеткой прямой Э-задачи Марковица можно рассматривать как среднее по \mathfrak{M} решений обычных Э-задач для нечетких событий \tilde{x} , $x \in \mathfrak{X}$.

Список литературы

- [1] О.Ю.Воробьев. Эвентология. Сибирский федеральный университет, Красноярск, 2007, 435с.
- [2] О.Ю.Воробьев С.В.Клочков. Эвентологический анализ задач распределения и заполнения ресурсов. Красноярский гос.торг.экон.ин-т., Красноярск, 2007.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Г.В. Романенко

Сибирский федеральный университет, Институт математики

Научный руководитель — к.ф.-м.н. И.В. Фроленков

В работе исследуется корректность обратной задачи для двумерного параболического уравнения. Существование и единственность решения доказывается в классе гладких ограниченных функций. Для приведения обратной задачи к прямой используется подход, предложенный Ю.Е. Аниконовым в работе [1]. Используются условия переопределения специального вида. Исходная обратная задача разбивается на две одномерных задачи, одна из которых содержит выражение для неизвестного коэффициента, а вторая является обычной задачей Коши для параболического уравнения.

Рассмотрим в области $G_{[0,T]} = \{(t, x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq T\}$ задачу Коши для параболического уравнения

$$u_t = a(t)u_{xx}(t, x, y) + b(t)u_{yy}(t, x, y) + \lambda(t, x)B_x(u), \quad (1)$$

где $B_x(u) = c_1(t)u_{xx}(t, x, y) + c_2(t)u_x(t, x, y) + c_3(t)u(t, x, y)$,
с начальным условием:

$$u(0, x, y) = u_0(x, y). \quad (2)$$

Функции $a(t), b(t), c_i(t)$ — непрерывные, ограниченные на $[0, T]$, причем $a(t) \geq a_0 > 0, b(t) \geq b_0 > 0, c_i(t) > 0, i = 1, 2, 3$. Функция $u_0(x, y)$ действительнозначная и задана в \mathbb{R}^2 . Функция $\lambda(t, x)$ подлежит определению одновременно с решением $u(t, x, y)$ задачи (1), (2).

Выполнено условие переопределения

$$u(t, x, 0) = \psi(t, x), \quad (3)$$

условие согласования

$$u_0(x, 0) = \psi(0, x). \quad (4)$$

Считаем выполненное условие

$$|B_x(\psi)| = |c_1(t)\psi_{xx}(t, x) + c_2(t)\psi_x(t, x) + c_3(t)\psi(t, x)| \geq \mu > 0, \quad \mu - \text{const}. \quad (5)$$

Частным случаем теоремы, сформулированной Ю.Е. Аниконовым в работе [1], является следующая теорема.

Теорема 1: Если существуют решения $f(t, x)$ и $\varphi(t, y)$ следующих задач Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= a(t)f_{xx} + B_x(f) \frac{\psi_t(t, x) - a(t)\psi_{xx}(t, x) - f(t, x)\varphi_t(t, 0)}{B_x(\psi)}, \\ f(0, x) &= v_0(x), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= b(t)\varphi_{yy}, \\ \varphi(0, y) &= w_0(y), \end{aligned} \quad (7)$$

то функции $u(t, x, y)$ и $\lambda(t, x)$, определенные формулами

$$\begin{aligned} u(t, x, y) &= f(t, x)\varphi(t, y), \\ \lambda(t, x) &= \frac{\psi_t(t, x) - a(t)\psi_{xx}(t, x) - f(t, x)\varphi_t(t, 0)}{B_x(\psi)}, \end{aligned}$$

являются решением обратной задачи (1) – (3) в предположении, что $u_0(x, y) = v_0(x)w_0(y)$.

Для задачи Коши (7) известно, что если $w_0(y) \in C(\mathbb{R})$ и ограничена, то решение задачи Коши в классе функций, ограниченных при любом $t \in [0, T]$, существует и единственno.

Для доказательства существования решения задачи (6) рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= a(t)f_{xx} + B_x(f)S_\delta \left(\frac{\beta(t, x) - f(t, x)\varphi_t(t, 0)}{B_x(\psi)} \right), \\ f(0, x) &= v_0(x), \end{aligned} \quad (8)$$

здесь $\beta(t, x) = \psi_t(t, x) - a(t)\psi_{xx}(t, x)$ — это известная функция, а $S_\delta(\vartheta)$ — функция срезки, определенная в \mathbb{R} , сколь угодно раз непрерывно дифференцируемая и обладающая следующими свойствами:

$$S_\delta(\vartheta) \geq \frac{\delta}{3} > 0, \quad \vartheta \in \mathbb{R} \text{ и } S_\delta(\vartheta) = \begin{cases} \vartheta, & \text{при } \vartheta \geq \frac{\delta}{2}, \\ \frac{\delta}{3}, & \text{при } \vartheta \leq \frac{\delta}{3}. \end{cases}$$

Определению подлежит функция $f(t, x)$. Функция $v_0(x)$ действительнозначная и задана в \mathbb{R} . Функция $S_\delta^{(k)}(\vartheta) \leq 2, k = 1, \dots, 4$.

Для доказательства существования решения вспомогательной задачи используем метод слабой аппроксимации. Фиксируем постоянную $\tau > 0$ такую, что $\tau N = T$. Разбиваем задачу на три дробных шага и линеаризуем задачу сдвигом по переменной t на величину $\frac{\tau}{3}$.

$$f_t^\tau = 3a(t)f_{xx}^\tau(t, x), \quad n\tau < t \leq \left(n + \frac{1}{3}\right)\tau, \quad (9)$$

$$f_t^\tau = 3(c_1(t)f_{xx}^\tau(t, x) + c_2(t)f_x^\tau(t, x))S_\delta(\lambda^\tau(t, x)), \quad \left(n + \frac{1}{3}\right)\tau < t \leq \left(n + \frac{2}{3}\right)\tau, \quad (10)$$

$$f_t^\tau = 3c_3(t)f^\tau(t, x)S_\delta(\lambda^\tau(t, x)), \quad \left(n + \frac{2}{3}\right)\tau < t \leq (n+1)\tau, \quad (11)$$

$$f^\tau(0, x) = v_0(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1), \quad N\tau = T, \quad (12)$$

$$\text{где } \lambda^\tau(t, x) = \frac{\beta(t, x) - f^\tau(t - \frac{\tau}{3}, x) \varphi_t(t, 0)}{B_x(\psi)}.$$

Относительно функций $v_0(x), \psi(t, x)$ предположим, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующее соотношение и удовлетворяют ему:

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} v_0(x) \right| + \left| \frac{\partial^i}{\partial x^i} \psi(t, x) \right| \leq C, \quad k = 0, \dots, 4, \quad i = 0, \dots, 6. \quad (13)$$

В работе доказаны априорные оценки, гарантирующие компактность семейства решений $f^\tau(t, x)$ задачи (9)–(12) в классе гладких непрерывных функций. В $G_{[0, t^*]}$ справедливы равномерные по τ оценки

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} f^\tau(t, x) \right| \leq C, \quad k = 0, \dots, 4. \quad (14)$$

Здесь $0 < t^* \leq T$ — некоторая константа, зависящая от μ из (5), постоянных из (13), ограничивающих входные данные, а также постоянных, ограничивающих функции $a(t), b(t), c_i(t), i = 1, 2, 3$.

Используя оценки (14), из уравнений (9)–(12) справедлива равномерная

по τ оценка

$$|f_t^\tau(t, x)| \leq C, \quad (t, x) \in G_{[0, t^*]}. \quad (15)$$

Дифференцируя уравнения задачи (9)–(12) по переменной x один или два раза, получим равномерные по τ оценки

$$|f_{tx}^\tau(t, x)| + |f_{txx}^\tau(t, x)| \leq C, \quad (t, x) \in G_{[0, t^*]},$$

что вместе с (14), (15) гарантирует выполнение условий теоремы Арцела о компактности.

В силу теоремы Арцела о компактности [5] некоторая подпоследовательность $f^{\tau_k}(t, x)$ последовательности $f^\tau(t, x)$ решений задачи (9)–(12) сходится вместе с производными по x до второго порядка включительно к функции $f(t, x) \in C_{t,x}^{0,2}(G_{[0, t^*]})$.

На основании теоремы сходимости МСА [4], $f(t, x)$ — решение задачи (8), причем $f(t, x) \in C_{t,x}^{1,2}(G_{[0, t^*]})$, где

$$C_{t,x}^{1,2}(G_{[0, t^*]}) = \left\{ f(t, x) \mid f_t(t, x), \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(t, x) \in C(G_{[0, t^*]}), k = 0, 1, 2. \right\}$$

При этом

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(t, x) \right| \leq C, \quad k = 0, 1, 2. \quad (16)$$

В предположении, что выполняется условие при $(t, x) \in G_{[0, t^*]}$

$$\frac{\beta(t, x) - v_0(x)\varphi_t(t, 0)}{B_x(\psi)} \geq \delta, \quad (17)$$

доказано, что

$$\frac{\beta(t, x) - f(t, x)\varphi_t(t, 0)}{B_x(\psi)} \geq \frac{\delta}{2}. \quad (18)$$

Из определения срезающей функции $S_\delta(\vartheta)$ и оценки (18) следует, что $f(t, x)$ — решение задачи (6).

Таким образом, доказано существование решения функции $f(t, x)$ задачи (6) в классе $C_{t,x}^{1,2}(G_{[0, t^*]})$.

Справедлива

Теорема 2: *Пусть выполняются соотношения (5), (13), (17). Тогда существует решение $f(t, x)$ задачи (6) в классе*

$$C_{t,x}^{1,2}(G_{[0, t^*]}) = \left\{ f(t, x) \mid f_t(t, x), \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(t, x) \in C(G_{[0, t^*]}), k = 0, 1, 2 \right\},$$

удовлетворяющее соотношению

$$\sum_{k=0}^2 \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(t, x) \right| \leq C. \quad (19)$$

Доказана единственность решения задачи (6), путем доказательства тождественного равенства нулю в $G_{[0,t^*]}$ разности двух предполагаемых решений.

Справедлива

Теорема 3: Пусть выполняются соотношения (5), (13), (17). Тогда решение $f(t, x)$ задачи (6) в классе $C_{t,x}^{1,2}(G_{[0,t^*]})$, удовлетворяющее соотношению (19), единствено.

Из теорем 1—3 следует существование и единственность решения задачи (1), (2).

Список литературы

- [1] Ю.Е.Аниконов. *О методах исследования многомерных обратных задач для эволюционных уравнений*// Доклады академии наук, том 331, №3, 1993, С.409 – 410.
- [2] Ю.Я.Белов, И.В.Фроленков. *Некоторые задачи идентификации коэффициентов полулинейных параболических уравнений*// Доклады Академии Наук, том 404, №5, 2005, С.583 – 585.
- [3] Ю.Я.Белов, И.В.Фроленков. *О задаче идентификации двух коэффициентов параболического полулинейного уравнения с условиями переопределения, заданными на гладкой кривой* // Специальный выпуск журнала «Вычислительные технологии», посвященный 85-летию академика Н.Н.Яненко, том 11, ч.1, 2006, С.46 – 54.
- [4] Ю.Я.Белов, С.А.Кантор. *Метод слабой аппроксимации*// КрасГУ, 1999.
- [5] А.Н.Колмогоров, С.В. Фомин. *Элементы теории функций и функционального анализа.* — 7-е изд. — М.:ФИЗМАТЛИТ, 2006. — С.120-121.

РЕШЕНИЕ СОПРЯЖЕННОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ В КРУГОВЫХ ОБЛАСТЯХ

Д.А. Рукосуева

Сибирский федеральный университет, Институт математики

Научный руководитель — д.ф.-м.н. В.К. Андреев

Постановка задачи

В данной работе решается следующая сопряженная задача.

Пусть имеются две функции $u_1(r, \varphi), u_2(r, \varphi)$, зависящие от полярных координат (r, φ) . Функция $u_1(r, \varphi)$ определена в круге $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, а $u_2(r, \varphi)$ — в кольце $a \leq r \leq b$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Функции $u_{1,2}$ в своих областях определения удовлетворяют уравнениям

$$-\mu_1 \Delta u_1 = \lambda u_1, \quad (r, \varphi) \in \Omega_1, \quad (1.1)$$

$$-\mu_2 \Delta u_2 = \lambda u_2, \quad (r, \varphi) \in \Omega_2, \quad (1.2)$$

где $\mu_{1,2}$ — известные положительные постоянные; λ — неизвестный параметр; $\Omega_{1,2}$ — открытый круг радиуса a и открытое кольцо $a < r < b$, соответственно; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} + r^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ — оператор Лапласа, записанный в полярных координатах.

Кроме того, имеются граничные условия, именно

$$|u_1(0, \varphi)| < \infty \quad (1.3)$$

— ограниченность функции u_1 в начале координат,

$$u_2(b, \varphi) = 0, \quad (1.4)$$

$$u_1(a, \varphi) = u_2(a, \varphi), \quad \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial r}(a, \varphi) = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial r}(a, \varphi). \quad (1.5)$$

Требуется найти функции $u_1 \in C^2(\Omega_1) \cap C^1(S_1)$, $S_1 = \{r \mid r = a\}$, $u_2 \in C^2(\Omega_2) \cap C^1(S_2) \cap C(S_2)$, $S_2 = \{r \mid r = b\}$, удовлетворяющие уравнениям (1.1), (1.2) и условиям (1.3) — (1.5). Такая задача называется сопряженной задачей на собственные значения. Параметр λ , который есть, вообще говоря, комплексное число, называется собственным значением. Ненулевые функции $u_1(r, \varphi), u_2(r, \varphi)$ являются собственными функциями этой спектральной задачи. Заметим, что эти функции находятся с точностью до мультипликативной постоянной, то есть, если u_1, u_2 — решение, то cu_1, cu_2 — тоже решение с произвольной постоянной c .

Требуется:

1. доказать, что собственные значения $\lambda > 0$ и что при $\lambda = 0$ имеется только нулевое решение, то есть $u_1 = u_2 = 0$.

2. применить метод разделения переменных, то есть искать решение задачи (1.1) — (1.5) в виде $u_1 = R_1(r)\Phi_1(\varphi)$, $u_2 = R_2(r)\Phi_2(\varphi)$ и затем методом Фурье определить это решение.

Доказательство положительности спектрального параметра

Докажем, что собственные значения $\lambda > 0$ и что при $\lambda = 0$ имеется только нулевое решение.

Из (1.1) — (1.5) выводится равенство

$$\begin{aligned} \mu_1 \int_{S_1} r |\nabla u_1|^2 d\varphi dr + \mu_2 \int_{S_2} r |\nabla u_2|^2 d\varphi dr = \\ = \lambda \left[\int_0^a \int_0^{2\pi} r |u_1|^2 d\varphi dr + \int_a^b \int_0^{2\pi} r |u_2|^2 d\varphi dr \right], \quad (2.1) \end{aligned}$$

откуда и следует, что $\lambda > 0$.

Если $\lambda = 0$, то из (2.1) получим $\nabla u_j = 0$, $j = 1, 2$, т.е. $u_j = const$. Поскольку $u_2(b, \varphi) = 0$, то $u_2(r, \varphi) \equiv 0$. Теперь из первого равенства (1.5) следует, что $u_1(r, \varphi) \equiv 0$.

Разделение переменных

Ищем частные решения в виде $u_1 = R_1(r)\Phi_1(\varphi)$, $u_2 = R_2(r)\Phi_2(\varphi)$. Они имеют вид

$$\begin{aligned} u_{1mk} &= (A_{2mk} \cos m\varphi + B_{2mk} \sin m\varphi) J_m \left(\sqrt{\frac{\lambda_k^{(m)}}{\mu_1}} r \right), \\ u_{2mk} &= (A_{2mk} \cos m\varphi + B_{2mk} \sin m\varphi) \left(D_{2mk} J_m \left(\sqrt{\frac{\lambda_k^{(m)}}{\mu_2}} r \right) + \right. \\ &\quad \left. + D_{3mk} Y_m \left(\sqrt{\frac{\lambda_k^{(m)}}{\mu_2}} r \right) \right), \quad (3.1) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} D_{3mk} &= \frac{J_m \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_1}} a \right) J_m \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_2}} b \right)}{J_m \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_2}} b \right) Y_m \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_2}} a \right) - J_m \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_2}} a \right) Y_m \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_2}} b \right)}, \\ D_{2mk} &= \frac{J_m \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_1}} a \right) J_m \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_2}} b \right) Y_m \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_2}} b \right)}{J_m \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_2}} b \right) Y_m \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_2}} a \right) - J_m \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_2}} a \right) Y_m \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_2}} b \right)}, \end{aligned}$$

а $\lambda_k^{(m)}$ — корень уравнения

$$\begin{aligned}
& J_m \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_1}} a \right) J_m \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_2}} b \right) \frac{\partial}{\partial r} Y_m \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_2}} r \right) - \\
& - J_m \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_1}} a \right) Y_m \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_2}} b \right) \frac{\partial}{\partial r} J_m \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_2}} r \right) = \\
& = \mu \frac{\partial}{\partial r} J_m \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_1}} r \right) Y_m \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_2}} a \right) J_m \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_2}} \right) b - \\
& - \mu \frac{\partial}{\partial r} J_m \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_1}} r \right) Y_m \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_2}} b \right) J_m \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_2}} \right) a \quad (3.2)
\end{aligned}$$

при $r = a$.

Это и есть уравнение для определения параметра (собственного числа) λ . Упрощая его вид, используя формулы дифференцирования функций Бесселя [1] приходим к уравнению на $x(\lambda) = a \sqrt{\frac{\lambda}{\mu_1}}$:

$$\begin{aligned}
& J_m(x) J_m \left(\frac{x \sqrt{\mu}}{\delta} \right) (m Y_m(x \sqrt{\mu}) - x \sqrt{\mu} Y_{m+1}(x \sqrt{\mu})) - \\
& - J_m(x) Y_m \left(\frac{x \sqrt{\mu}}{\delta} \right) (m J_m(x \sqrt{\mu}) - x \sqrt{\mu} J_{m+1}(x \sqrt{\mu})) = \\
& = \mu(m J_m(x) - x J_{m+1}(x)) \left[Y_m(x \sqrt{\mu}) J_m \left(\frac{x \sqrt{\mu}}{\delta} \right) - Y_m \left(\frac{x \sqrt{\mu}}{\delta} \right) J_m(x \sqrt{\mu}) \right]. \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Приближение тонкого слоя

Рассмотрим тонкий слой: $\frac{b-a}{b} = \varepsilon \ll 1$ или $\delta = 1 - \varepsilon$. В этом случае уравнение (3.3) допускает упрощение

$$\begin{aligned}
& J_m(x) \{ x \sqrt{\mu} [Y_m(x \sqrt{\mu}) J_{m+1}(x \sqrt{\mu}) - J_m(x \sqrt{\mu}) Y_{m+1}(x \sqrt{\mu})] \} + \\
& + J_m(x) \left\{ m x \sqrt{\mu} (J'_m(x \sqrt{\mu})) Y_m(x \sqrt{\mu}) - Y'_m(x \sqrt{\mu}) J_m(x \sqrt{\mu}) \varepsilon \right\} + \\
& + J_m(x) \left\{ x^2 \mu (Y'_m(x \sqrt{\mu}) J_{m+1}(x \sqrt{\mu}) - J'_m(x \sqrt{\mu}) Y_{m+1}(x \sqrt{\mu})) \varepsilon \right\} = \\
& = \mu(m J_m(x) - x J_{m+1}(x)) x \sqrt{\mu} (Y_m(x \sqrt{\mu}) J'_m(x \sqrt{\mu}) - J_m(x \sqrt{\mu}) Y'_m(x \sqrt{\mu})) \varepsilon.
\end{aligned}$$

Выражение в первых квадратных скобках равно $\frac{2}{x \pi \sqrt{\mu}}$ [1].

Следовательно с точностью до ε , x является корнем уравнения

$$J_m(x) = 0, \quad x = \tau_k^{(m)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ортонормированность собственных функций

Легко видеть, что собственные функции (3.1) ортогональны в $L_2((0, a) \times (0, 2\pi); r), L_2((a, b) \times (0, 2\pi); r)$. Выбором постоянных A_{2mk}, B_{2mk} можно сделать нормы этих функций равных единице, так чтобы $u_{jmk}(r, \varphi)$ составляли ортонормированный базис в пространствах $L_2((0, a) \times (0, 2\pi); r), L_2((a, b) \times (0, 2\pi); r)$.

Для этого вычислим квадраты их норм и приравняем к единице.

$$\begin{aligned} \|u_{1mk}\|^2 &= \int_0^a \int_0^{2\pi} r \left((A_{2mk} \cos m\varphi + B_{2mk} \sin m\varphi) J_m \left(\sqrt{\frac{\lambda_k^{(m)}}{\mu_1}} r \right) \right)^2 d\varphi dr = \\ &= \int_0^a \int_0^{2\pi} r (A_{2mk}^2 \cos^2 m\varphi + B_{2mk}^2 \sin^2 m\varphi + 2A_{2mk}B_{2mk} \cos m\varphi \sin m\varphi) \times \\ &\quad \times J_m^2 \left(\sqrt{\frac{\lambda_k^{(m)}}{\mu_1}} r \right) d\varphi dr = 1. \\ \|u_{2mk}\|^2 &= \int_a^b \int_0^{2\pi} r (A_{2mk}^2 \cos^2 m\varphi + B_{2mk}^2 \sin^2 m\varphi + 2A_{2mk}B_{2mk} \cos m\varphi \sin m\varphi) \times \\ &\quad \times \left(D_{2mk}^2 J_m^2 \left(\sqrt{\frac{\lambda_k^{(m)}}{\mu_1}} r \right) + D_{2mk} D_{3mk} J_m \left(\sqrt{\frac{\lambda_k^{(m)}}{\mu_2}} r \right) Y_m^2 \left(\sqrt{\frac{\lambda_k^{(m)}}{\mu_2}} r \right) + \right. \\ &\quad \left. + D_{3mk} Y_m^2 \left(\sqrt{\frac{\lambda_k^{(m)}}{\mu_2}} r \right) \right) d\varphi dr = 1. \end{aligned}$$

Из последних двух уравнений с помощью формул для интегралов от функций Бесселя [2] легко находятся A_{2mk}, B_{2mk} . Они имеют довольно громосткие выражения и здесь не приводятся.

Список литературы

- [1] Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш *Специальные функции, Наука, 1977.*
- [2] А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев *Интегралы и ряды. Специальные функции, Наука, 1983.*

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ АЛГОРИТМА МУРАВЬИНЫХ КОЛОНИЙ

О.Е. Семенкина

Сибирский федеральный университет, Институт математики

Научный руководитель — д.т.н. Е.С. Семенкин

Исследование эффективности стохастических алгоритмов, работающих одновременно с большим количеством текущих решений (многоагентных) на задачах оптимизации является актуальной научной проблемой современной математики. Данная работа посвящена исследованию эффективности алгоритма муравьиных колоний.

Муравьиный алгоритм основан на имитации поведения муравьев в природе [1]. Почти слепые животные, такие как муравьи, справляются с задачей отыскания кратчайшего пути от гнезда до источника пищи и обратно. Для обмена информацией они используют след фермента, оставляемый на пути. Муравей с большей вероятностью выбирает тот путь, на котором большее количество фермента. Чем больше муравьев прошло данным путем, тем более притягательным он становится для следующих.

Так как имитируется поведение не реальной семьи муравьев, а используется искусственная колония муравьев как инструмент оптимизации, то имеются некоторые существенные отличия от реальной ситуации:

- искусственные муравьи обладают некоторой памятью,
- они не являются полностью слепыми,
- они живут в искусственной среде с дискретным временем.

Для разработки и исследования эффективности алгоритма была использована широко известная *задача коммивояжера* [2]. Если имеется заданное множество из n городов, то задача коммивояжера - это задача нахождения замкнутого обхода минимальной длины, причем каждый город должен быть посещен единственный раз.

Обозначим через d_{ij} длину пути между городами i и j . Пусть m - общее количество муравьев. Для того чтобы муравей делал только допустимый выбор, переходы в уже посещенные города запрещены до тех пор, пока обход не будет завершен полностью (это контролируется с помощью списка табу). Когда получен полный обход муравей оставляет вещество, называемое следом, на каждом пройденном ребре (i, j) .

Пусть $\tau_{ij}(t)$ это *интенсивность следа* на ребре (i, j) в момент времени t . Каждый муравей в момент времени t выбирает следующий город, где он будет находиться в момент $t + 1$. Поэтому, если мы назовем *итерацией* алгоритма m ходов, выполненных m муравьями в течение интер-

вала времени $(t, t + 1)$, то через каждые n итераций алгоритма (которые мы будем называть *циклом*) каждый муравей завершит полный обход. В этот момент интенсивность следа обновляется в соответствии с формулой $\tau_{ij}(t+n) = \rho \cdot \tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij}$, где ρ является коэффициентом таким, что $(1 - \rho)$ представляет собой *испарение* следа в период между моментами времени t и $t + n$. $\Delta\tau_{ij} = \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{ij}^k$, где $\Delta\tau_{ij}^k$ есть количество вещества следа, оставленного на единице длины ребра (i, j) k -м муравьем в интервале времени между t и $t + n$; оно задается формулой

$$\Delta\tau_{ij} = \begin{cases} Q/L_k, & \text{если } k\text{-й муравей использует ребро } (i, j) \text{ в своем обходе} \\ & (\text{между моментами времени } t \text{ и } t + n), \\ 0, & \text{если не использует,} \end{cases}$$

где Q является постоянной, L_k - длина обхода k -го муравья.

Коэффициент ρ должен иметь значение меньше 1 для того, чтобы исключить неограниченное накопление следа.

Для того чтобы удовлетворить ограничение, что муравей должен посетить все n различных городов, каждому муравью ставится в соответствие *список табу*, который хранит города, которые уже были посещены до момента времени t , и запрещает муравью посещать такие города до того, как будут выполнены n итераций полного обхода. Когда обход будет полностью завершен, список табу используется для вычисления длины пути, пройденного муравьем. После этого список табу очищается, и муравей снова может выбирать города для посещения. Обозначим через \mathbf{tabu}_k динамически увеличивающийся вектор, который содержит список табу k -го муравья, $tabu_k$ - множество, полученное из элементов вектора \mathbf{tabu}_k .

Пусть число η_{ij} , равное $1/d_{ij}$, называется *видимостью*. Это число не изменяется в течение работы алгоритма.

Муравей выбирает город в который собирается идти с вероятностью, которая является функцией расстояния до города и количества следов, оставленный на соединяющем ребре. Вероятность перехода из города i в город j для k -го муравья выражается следующим образом

$$p_{ij}^k = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}(t)]^\alpha \cdot [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_k [\tau_{ik}(t)]^\alpha \cdot [\eta_{ik}]^\beta}, & \text{если } j \in allowed_k \ (k \in allowed_k); \\ 0, & \text{если } j \notin allowed_k, \end{cases}$$

где $allowed_k = N - tabu_k$ и где α и β являются параметрами, которые управляют относительной важностью следа и видимости. Поэтому значения вероятности перехода задаются через взаимный обмен между видимостью и интенсивностью следа в момент времени t .

В данной работе проводилось исследование эффективности алгоритма

муравьиных колоний в зависимости от различного выбора параметров α , β , Q и ρ .

На решетке 5×5 городов, с заданным количеством циклов - 50, муравьев - 25, были получены следующие результаты.

	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 5$	$\beta = 10$	$\beta = 100$
$\alpha = 0$	0	0	0	3	64	65
$\alpha = 0.5$	0	0	0	65	78	81
$\alpha = 1$	0	0	23	84	94	93
$\alpha = 2$	0	0	29	82	85	87
$\alpha = 5$	0	0	3	57	64	62

В таблице приведена надежность алгоритма по 100 прогонам. Из нее видно, что большую эффективность алгоритм показывает при $\alpha = 1$, $\beta = 10$.

Зависимость надежности от параметров Q и ρ была рассмотрена при количестве циклов 10, муравьев 25.

$$\alpha = 1, \beta = 5.$$

ρ	0.3	0.5	0.7	0.9	0.999
Надежность	78	90	92	86	80

$$\alpha = 1, \beta = 5.$$

Q	1	100	10000
Надежность	89.6	86	83.6

$$\alpha = 1, \beta = 1.$$

Q	1	100	10000
Надежность	43	44	47

Таким образом, можно сказать, что значение параметра Q существенного влияния на надежность алгоритма не оказывает, а параметр ρ должен быть равен 0.5 – 0.7.

Далее была рассмотрена эффективность алгоритма в зависимости от количества муравьев для того, чтобы оценить эффективность на одного муравья. Проверка проводилась на решетках 4×4 и 5×5 , т.е. при 16 и 25 городах, соответственно, расположенных в узлах решетки с одинаковыми расстояниями между городами.

Наилучший результат алгоритм показывает при количестве муравьев приблизительно равном количеству городов.

Таким образом, была реализована программа алгоритма муравьиных

колоний и исследована надежность этого алгоритма в зависимости от различных настроек параметров, а именно выявлены лучшие настройки: $\alpha = 1$, $\beta = 10$, $\rho = 0.5 - 0.7$, значение параметра Q существенного влияния не оказывает, $m \approx n$, т.е. количество муравьев должно быть близко к количеству городов.

Список литературы

- [1] M. Dorigo, L.M. Gambardella. *Ant Colony System: A Cooperative Learning Approach to the Traveling Salesman Problem* // *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1997, 1 (1): 53-66.
- [2] В.И. Мудров. *Задача о коммивояжере*. - М.: "Знание", 1969. - С. 62.

РАЗРАБОТКА И АНАЛИЗ МЕТОДОВ РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ ЦИКЛОВ С ЗАВИСИМОСТЬЮ ПО ДАННЫМ ПРИ ПОМОЩИ ТЕХНОЛОГИИ ОРЕНМР.

И.Л. Созонова

Сибирский федеральный университет, Институт математики

Научный руководитель — к.ф.-м.н. Е.Д. Карепова

В работах [1,2,3] рассмотрено численное моделирование поверхностных волн в больших акваториях с учетом сферичности Земли и ускорения Кориолиса на основе уравнений мелкой воды. В работе [1] для дифференциальной постановки задачи выведены полезные априорные оценки, обеспечивающие устойчивость решения и однозначную разрешимость задачи. В [2,3] для этой же задачи построен метод конечных элементов, для которого получены необходимые априорные оценки. Там же приведены результаты численных экспериментов на модельных сетках, для акваторий Охотского моря и Мирового океана.

В работах [4,5] проведено исследование эффективности нескольких параллельных реализаций алгоритма численного решения краевой задачи для уравнений мелкой воды, выполненных с помощью библиотеки MPI для языка Си для кластерных систем.

Для решения системы линейных алгебраических уравнений, полученных при реализации метода конечных элементов использовался итерационный метод Якоби, который обладает хорошим параллелизмом, а диагональное преобладание для его сходимости легко обеспечивается выбором

шага по времени τ . В векторно-матричной форме метод Якоби запишется в следующем виде:

$$\Phi^{(\nu+1)} = \Phi^{(\nu)} - D^{-1} \left(A\Phi^{(\nu)} - \mathbf{F} \right). \quad (1)$$

Здесь ν — номер итерации, индексы $(k + 1)$ для шага по времени опущены, однако компоненты глобальной матрицы жесткости и вектора правой части зависят от времени и должны пересчитываться в начале каждого временного шага.

Отметим некоторые особенности реализации, диктуемые методом конечных элементов. Глобальная матрица жесткости A зависит от времени и должна пересчитываться на каждом временном шаге. Однако для реализации метода Якоби на конечных элементах не требуется явного хранения глобальной матрицы жесткости. В программе насчитываются только элементы локальных матриц жесткости (причем только их диагональные элементы зависят от времени и перевычисляются на каждом временном шаге). Вычисление невязки $A\Phi^{(\nu)} - \mathbf{F}$ в (1) производится по треугольникам с использованием элементов локальных матриц.

Основной проблемой при распараллеливании этих алгоритмов для вычислительных систем с общей памятью является зависимость по данным в основном цикле программы.

Данная работа посвящена разработке и анализу методов распараллеливания циклов с зависимостью по данным при помощи технологии OpenMP.

OpenMP реализует параллельные вычисления с помощью многопоточности, в которой «главная» (master) нить создает набор «подчиненных» (slave) нитей, и задача распределяется между ними. Предполагается, что нити выполняются параллельно на машине с несколькими процессорами, причём количество процессоров не обязательно должно быть больше или равно количеству нитей [6].

Для разработки и анализа методов распараллеливания была создана тестовая программа, моделирующая основной цикл метода конечных элементов для краевой задачи для уравнений мелкой воды.

Тестовая программа моделирует семиточечный шаблон метода Якоби (рис. 1). Используя явный параллелизм по данным, исходную расчетную область можно разбить на несколько перекрывающихся только по границе подобластей (рис 2). Расчеты в каждой подобласти можно проводить независимо друг от друга в рамках итерации. Однако, вычисления в граничных точках подобласти дают зависимость по данным в теле цикла итерации Якоби, которая и должна быть разрешена при реализации алгоритма на общей памяти.

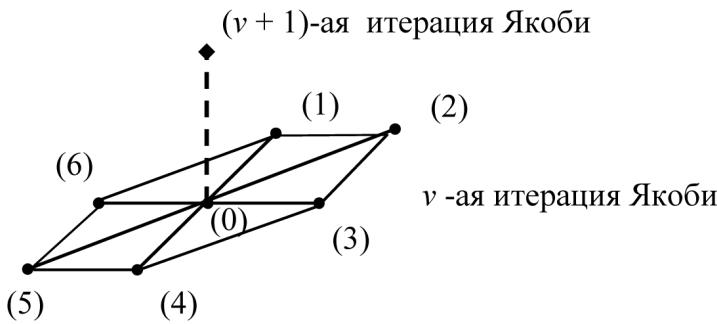


Рис. 1: Зависимость в итерациях Якоби

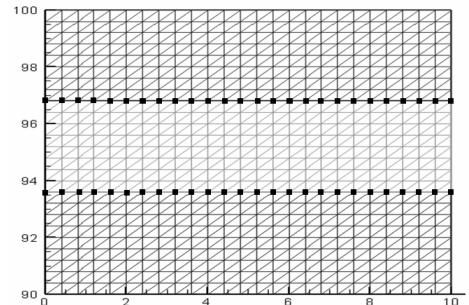


Рис. 2: Декомпозиция области при цикле обработке нескольки-ми потоками

Тестирование подходов проводилось на модельной равномерной прямоугольной сетке 801×801 точек с согласованной триангуляцией. Тестовая программа не содержит никаких существенных вычислений, а моделирует только сборку по треугольникам невязки в итерациях метода Якоби. Следовательно, время выполнения параллельной программы показывает в основном временные затраты, связанные с дополнительными накладными расходами на реализацию параллельности в зависимых по данным циклах.

Рассмотрим три подхода к распараллеливанию основного цикла программы.

Метод 1: Установление критических областей. Установление критических областей осуществляется при помощи замков. Замок может находиться в одном из трёх состояний: неинициализированный, разблокированный или заблокированный. Нить, захватывая разблокированный замок, переводит его в заблокированное состояние, причем только нить, захвативший замок, может его освободить (разблокировать).

Для инициализации замка используется функция `omp_init_lock()`. Функция `omp_destroy_lock()` используется для переведения замка в неинициализированное состояние. Для захватывания замка используется функция `omp_set_lock()`. Вызвавшая эту функцию нить дожидается освобождения замка, а затем захватывает его. Для освобождения замка используется функция `omp_unset_lock()` [6].

В программе данный метод реализован следующим образом:

```
omp_init_lock(&lock);
#pragma omp parallel for schedule(static,N_tr/chislo_razb) private(a,i,j)
for(i=1;i<=N_tr;i++)
    for(j=0;j<3;j++) {
        a=tr_mas[i][j];
        omp_set_lock(&lock);
        u[a]=u[a]+pts_mas[a];
```

```

        omp_unset_lock(&lock);
    }
omp_destroy_lock(&lock);

```

После проведения экспериментов с различным количеством нитей и разбиений на полосы, было получено, что от количества разбиений на полосы ускорение практически не зависит. А с увеличением числа нитей программа только замедляется. Это объясняется тем, что замки устанавливают блокировку не на какие-либо переменные, а на часть программного кода. Поэтому с увеличением числа нитей программа продолжает работать последовательно, но появляются затраты времени на проверку захвачен ли замок.

Метод 2: Установление критической области только на точки границы. Увеличение эффективности можно ожидать в случае, если замки устанавливаются только на данные, попадающие на границы подобластей, что существенно повышает параллельность алгоритма.

В программе данный метод реализован следующим образом:

```

int VMas(int k){
    int i, fl=0;
    for(i=1; i<=chislo_razb;i++)
        if(k>=2*(i*kol_tr/chislo_razb-1)*kol_tr+1 && \
           k<=2*(i*kol_tr/chislo_razb-1)*kol_tr+1+kol_tr)
            fl=1;
    if(fl==0)
        return 0;
    else
        return 1;
}
...
omp_init_lock(&lock);
#pragma omp parallel for schedule(static,N_tr/chislo_razb) private(a,i,j)
for(i=1;i<=N_tr;i++)
    for(j=0;j<3;j++){
        a=tr_mas[i][j];
        if(VMas(a)==1){
            omp_set_lock(&lock);
            u[a]=u[a]+pts_mas[a];
            omp_unset_lock(&lock);
        }
        else
            u[a]=u[a]+pts_mas[a];
    }
omp_destroy_lock(&lock);

```

Данный метод для тестовой задачи показал лучшее ускорение при разбиении на 24 полосы. При 2 нитях ускорение равно 1,997654, при трех — 2,955232, при четырех — 3,764082.

Метод 3: Использование директивы OpenMP #pragma omp atomic. Частым случаем использования критических секций на практике является обновление общих переменных. Например, если переменная *sum* является общей, и оператор вида *sum = sum + expr* находится в параллельной области программы, то при одновременном выполнении данного оператора несколькими нитями можно получить некорректный результат. Чтобы избежать такой ситуации, можно воспользоваться специально предусмотренной для таких случаев директивой **atomic** [6].

В программе данный метод реализован следующим образом:

```
#pragma omp parallel for schedule(guided,N_tr/chislo_razb) private(a,i,j)
for(i=1;i<=N_tr;i++){
    for(j=0;j<3;j++){
        a=tr_mas[i][j];
        #pragma omp atomic
        u[a] +=pts_mas[a];}}
```

Данный метод показал на тестовой задаче худшее ускорение по сравнению со вторым. При разбиении на 16 подобластей были получены самые лучшие результаты для данного метода — при двух нитях ускорение равно 1,771774, при трех — 2,495355, при четырех — 2,891732. Однако, при анализе фактического времени работы программы видно, что этот метод работает быстрее (фактическое время работы для метода 2 на 4 нитях — 0,516184, для метода 3 — 0,035369). По всей видимости при реальных расчетах издержки метода 3 будут ниже, чем в методе с установлением критической области только на точки границы.

Список литературы

- [1] Agoshkov V.I. *Inverse problems of the mathematical theory of tides: boundary-function problem* // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2005. – Vol. 20, № 1. – P. 1-18.
- [2] Kamenshchikov, L.P. *Simulation of surface waves in basins by the finite element method* / Kamenshchikov L.P., Karepova E.D., Shaidurov V.V. // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2006. – Vol. 21, №4. – Pp. 305-320.
- [3] Karepova, E.D. *Numerical Solution of the Boundary Problem for Shallow Water Equations for Modelling Surface Waves in World Ocean by Finite Elements Methods* / Kamenshchikov L.P., Karepova E.D., Shaidurov V.V. // In: *Finite Difference Methods: Theory and Applications. Proceedings of Fourth International Conference FDM:T'06.* – Bulgaria: Rousse, 2007. – P. 227-233.
- [4] Е.Д. Карепова, В.В. Шайдуров, М.С. Вдовенко. *Параллельные реализации метода конечных элементов для краевой задачи для уравнений мел-*

кой воды // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование". – 2009. – № 17 (150), Вып. 3. – С. 73-85.

[5] Е.Д. Карепова, В.В. Шайдуров. Параллельная реализация метода конечных элементов для начально-краевой задачи мелкой воды // Вычислительные технологии. – 2009. – Том 14, №6. – С. 45-57.

[6] А.С. Антонов. Параллельное программирование с использованием технологии OpenMP // Издательство московского университета. – 2009. – 200 с.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Г.А. Спичак

Сибирский федеральный университет, Институт математики
Научный руководитель — доцент, к.ф.-м.н. Т.Н. Шипина

В данной работе получены достаточные условия разрешимости задачи Коши для нелинейного интегродифференциального уравнения без ограничений на временную переменную и исследовано поведение решения задачи при $t \rightarrow \infty$.

История развития и основные методы решения интегродифференциальных уравнений представлены в [1]. Задачи такого типа возникают при исследовании разрешимости обратных задач с использованием преобразования Фурье [2].

В полосе $G_{[0;T]} = \{(t, \xi) | 0 \leq t \leq T, \xi \in R\}$ рассматривается задача Коши для нелинейного интегродифференциального уравнения вида

$$w_t(t, \xi) = a(t, \xi) w^\alpha(t, \xi) + b(t, \xi) \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2m}(\xi) w(t, \xi) d\xi + f(t, \xi), \quad (1)$$

с начальным условием

$$w(0, \xi) = w_0(\xi), \quad (2)$$

где $P_{2m}(\xi) = \sum_{l=0}^m \xi^{2l}$ и α — произвольное целое число ($\alpha \geq 2$).

В ходе работы были рассмотрены два случая, когда $\alpha = 2k$, где $k = 1, 2, \dots$ и $\alpha = 2k - 1$, где $k = 2, 3, \dots$.

Предположим, что выполняются следующие условия

$$a(t, \xi) < 0, |a(t, \xi)| > K, \quad (3)$$

$$b(t, \xi) \geq 0, f(t, \xi) \geq 0, \quad (4)$$

$$w_0(\xi) \geq 0, \quad (5)$$

где $K = \text{const}$.

Введем множество функций

$$M(G_{[0,T]}) = \left\{ w(t, \xi) \mid w(t, \xi) \in C^{1,0}(G_{[0,T]}) \text{ и ограничена в } G_{[0,T]}, \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2m}(\xi) |w(t, \xi)| d\xi < \infty \quad \forall t \in [0; T]. \right\}$$

Определение 1. Функция $w(t, \xi) \in M(G_{[0,T]})$ называется классическим решением задачи (1), (2), если $w(t, \xi)$ удовлетворяет уравнению (1) в $G_{[0,T]}$, а при $t = 0$ начальному условию (2).

Здесь и далее пространство $C^{1,0}(G_{[0,T]})$ — пространство функций, непрерывно дифференцируемых по t и непрерывных по ξ на $G_{[0,T]}$.

Рассмотрим случай, когда $\alpha = 2k$, где $k = 1, 2, \dots$

Теорема 1. Пусть функции $a(t, \xi), b(t, \xi), f(t, \xi) \in C(G_{[0,T]}), w_0(\xi) \in C(R)$ и выполняются условия (3) — (5) и

$$(1 + |\xi|^{2m+1+\alpha})(w_0(\xi) + b(t, \xi) + f(t, \xi)) < C, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (6)$$

(где $C = \text{const}$) тогда задача (1), (2) имеет единственное решение $w(t, \xi) \in M(G_{[0,T]})$, которое удовлетворяет условию

$$(1 + |\xi|^{2m+1+\alpha})w(t, \xi) < N \quad \forall (t, \xi) \in G_{[0,T]},$$

где $N = \text{const}$.

Доказательство. Задачу будем решать методом последовательных приближений. Зададим итерации следующим образом

$$w_t^{n+1} = a(t, \xi) w^{n+1} (w^n)^{2k-1} + b(t, \xi) \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2m}(\xi) w^n d\xi + f(t, \xi), \quad (7)$$

$$w^{n+1}(0, \xi) = w_0(\xi). \quad (8)$$

Зададим начальную итерацию $w^0(t, \xi) \equiv w_0(\xi)$.

Известно, что на каждом $(n+1)$ -ом шаге задача (7), (8) имеет единственное решение $w^{n+1}(t, \xi) \in M(G_{[0,T]})$ [3], которое представимо форму-

лой

$$\begin{aligned}
w^{n+1} = w_0 e^{\int_0^t a(\tau, \xi) (w^n)^{2k-1} d\tau} &+ \int_0^t e^{\int_\eta^\tau a(\tau, \xi) (w^n)^{2k-1} d\tau} b(\eta, \xi) \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2m}(\xi) w^n d\xi d\eta + \\
&+ \int_0^t e^{\int_\eta^\tau a(\tau, \xi) (w^n)^{2k-1} d\tau} f(\eta, \xi) d\eta. \quad (9)
\end{aligned}$$

Для любого номера n верно $w^n(t, \xi) \geq 0 \forall (t, \xi) \in G_{[0;T]}$.

Докажем, что последовательность $w^n(t, \xi)$ ограничена в $G_{[0,T]}$.

Умножим (9) на многочлен $P_{2m}(\xi)$ и проинтегрируем обе части выражения по ξ . С учетом условия (3) получим следующее неравенство

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} P_{2m}(\xi) w^{n+1} d\xi &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2m}(\xi) w_0 d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2m}(\xi) f(\eta, \xi) d\xi d\eta + \\
&+ \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2m}(\xi) b(\eta, \xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2m}(\xi) w^n d\xi d\eta.
\end{aligned}$$

Из условия (6) имеем $\int_{-\infty}^{+\infty} P_{2m}(w_0(\xi) + b(t, \xi) + f(t, \xi)) d\xi < C_1$, где

C_1 — константа. Здесь и далее $C_i, i = 1, 2, \dots$, есть константа, которая не зависит от номера n и зависит от констант K, C, N .

Введем обозначение $I^n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2m}(\xi) w^n(t, \xi) d\xi$.

Тогда для $I^n(t)$ выполняется неравенство $I^{n+1}(t) \leq C_2 + C_1 \int_0^t I^n(\tau) d\tau$.

Рассматривая последнее неравенство при $n = 0, 1, 2, \dots$, получаем

$$I^{n+1}(t) \leq (C_2 + C_1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(C_1 t)^n}{n!} \quad \forall n \in N.$$

По признаку Даламбера ряд $(C_2 + C_1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(C_1 t)^n}{n!}$ сходится, значит имеет место оценка

$$I^{n+1}(t) \leq C_3. \quad (10)$$

Далее умножаем (9) на $(1 + |\xi|^{2m+1+\alpha})$, $0 < \alpha < 1$, с учетом (10) и условий теоремы получаем оценку

$$(1 + |\xi|^{2m+1+\alpha}) w^{n+1} \leq C_4 + C_5 \int_0^t I^n(\tau) d\tau \leq C_6.$$

Таким образом, имеет место оценка $\forall(t, \xi) \in G_{[0;T]}$

$$(1 + |\xi|^{2m+1+\alpha})w^{n+1} \leq C_6 \quad \forall n \in N. \quad (11)$$

Показали, что последовательность $w^n(t, \xi)$ ограничена в $G_{[0,T]}$.

Теперь покажем, что последовательность $w^n(t, \xi)$ является фундаментальной.

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} z_t^{n+1} &= a(t, \xi)(w^n)^{2k-1}z^{n+1} + a(t, \xi)w^n z^n \sum_{i=0}^{2k-2} (w^n)^{2k-2-i}(w^{n-1})^i + \\ &\quad + b(t, \xi) \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2m}(\xi)z^n d\xi, \\ z^{n+1}(0, \xi) &= 0, \end{aligned}$$

где

$$z^{n+1}(t, \xi) = w^{n+1}(t, \xi) - w^n(t, \xi).$$

Можно показать, используя оценку (11), что $\sup_{G_{[0;T]}} |z^{n+1}(t, \xi)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Откуда следует, что для функциональной последовательности $w^n(t, \xi)$ выполняется критерий Коши. Значит, последовательность $w^n(t, \xi)$ является фундаментальной, то есть существует функция $w(t, \xi) \in M(G_{[0;T]})$, к которой в $G_{[0;T]}$ равномерно сходится функциональная последовательность $w^n(t, \xi)$ при $n \rightarrow \infty$. Так как для последовательности $w^n(t, \xi)$ выполнено условие (6), то для предельной функции будет выполнено

$$(1 + |\xi|^{2m+1+\alpha})w \leq C_6. \quad (12)$$

Оценки (11), (12) позволяют показать, что $w(t, \xi) \in M(G_{[0;T]})$ и удовлетворяет уравнению (1) и условию (2).

Покажем, что решение задачи (1), (2) единственno.

Пусть $w_1(t, \xi), w_2(t, \xi)$ два решения задачи (1), (2) из класса $M(G_{[0;T]})$. Тогда $z(t, \xi) = w_1(t, \xi) - w_2(t, \xi)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_{2m}(\xi) |z(t, \xi)| d\xi \leq C_7 \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2m}(\xi) |z(\tau, \xi)| d\xi d\tau.$$

Из леммы Гронуолла следует, что $\int_{-\infty}^{+\infty} P_{2m}(\xi) |z(t, \xi)| d\xi = 0$, значит, $w_1(t, \xi) = w_2(t, \xi) = 0$ в $G_{[0;T]}$.

Единственность доказана.

Теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда $\alpha = 2k - 1$, где $k = 2, 3, \dots$

Теорема 2. Пусть функции $a(t, \xi), b(t, \xi), f(t, \xi) \in C(G_{[0,T]}), w_0(\xi) \in C(R)$ и выполняются условия (3) и

$$(1 + |\xi|^{2m+1+\alpha})(|w_0(\xi)| + |b(t, \xi)| + |f(t, \xi)|) < C, \quad 0 < \alpha < 1,$$

(где $C = \text{const}$) тогда задача (1), (2) имеет единственное решение $w(t, \xi) \in M(G_{[0;T]})$, которое удовлетворяет условию

$$(1 + |\xi|^{2m+1+\alpha}) |w(t, \xi)| < N \quad \forall (t, \xi) \in G_{[0;T]},$$

где $N = \text{const}$.

Заметим, что в $G_{[0;T]}$ верно $a(t, \xi)w^n(t, \xi) \geq 0$ для $\forall n \in N$. Дальнейшее доказательство теоремы в основных моментах повторяет доказательство теоремы 1.

Лемма 1. Пусть функции $a(t, \xi), b(t, \xi), f(t, \xi) \in C(G_{(0;+\infty)})$ и выполнены условия теоремы 1 (теоремы 2) для $\forall T > 0$. И начиная с некоторого $t^* > 0$ имеет место неравенство

$$|f(t, \xi)| + |b(t, \xi)| + \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2m}(\xi) (|f(t, \xi)| + |b(t, \xi)|) d\xi \leq \gamma(t),$$

где $\gamma(t)$ такова, что $\int_{t^*}^{+\infty} \gamma(t) dt < \infty$ и $P_{2m}(\xi) = \sum_{l=0}^m \xi^{2l}$. Тогда для решения задачи (1), (2) имеет место неравенство

$$\sup_{t \geq 0} |w(t, \xi)| + \sup_{t \geq 0} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{2m}(\xi) |w(t, \xi)| d\xi < M,$$

где $M = \text{const}$.

Здесь и далее пространство $C(G_{(0,+\infty)})$ — пространство функций, непрерывных по t и ξ на $G_{(0;+\infty)}$.

Следствие 1. Если дополнительно к условиям леммы 1 потребовать, чтобы $\lim_{t \rightarrow \infty} (\sup_{\xi \in R} |b(t, \xi)| + \sup_{\xi \in R} |f(t, \xi)|) = 0$, то решение задачи (1), (2) стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Список литературы

- [1] Г.А. Шишкин. Линейные интегродифференциальные уравнения Фредгольма, Издательство Бурятского госуниверситета, 2007.

- [2] Yu.Ya. Belov. *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. - Utrecht - Boston - Koln - Tokyo, 2002.
- [3] Л.С. Понtryгин. *Дифференциальные уравнения и их приложения*, УРСС, 2004.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОМЫШЛЕННОЙ ПОЛИТИКОЙ РЕГИОНА ГЕНЕТИЧЕСКИМ АЛГОРИТМОМ С ДВУМЯ КЛАССАМИ ХРОМОСОМ

М.А. Терновская

Сибирский федеральный университет, Институт математики
Научный руководитель – д.т.н., профессор Е.С. Семенкин

Под региональной инвестиционной политикой понимается система мер, проводимых на уровне региона и способствующих мобилизации инвестиционных ресурсов и определению направлений их наиболее эффективного и рационального использования в интересах населения региона и отдельных инвесторов.

Пусть в регионе функционируют и взаимодействуют три экономических агента: производитель, потребитель и региональный управляющий (налоговый) центр. В развитии регионального рынка заинтересован обобщенный инвестор – физическое или юридическое лицо любой формы собственности, – который готов вложить в развитие региона свои свободные денежные средства. Управляющий центр призван установить согласованное взаимодействие региональных социально-экономических комплексов – производственного и социального секторов – путем увязки их интересов. Установление такого взаимодействия может происходить через распределение и перераспределение региональных экономических ресурсов: реальных (земли, зданий, сооружений, оборудования), финансовых (инвестиций, дотаций) и других. Производитель и потребитель рассматривают управляющий центр как регулирующий орган, способный устанавливать их взаимодействие путем поддержки инвестиционных проектов с высоким уровнем общественной эффективности.

Обозначим в стоимостном выражении: c_k – стоимость основных производственных фондов (ОПФ) k -го типа; m_k – количество приобретаемых ОПФ k -го типа; V_k – проектная производительность ОПФ k -го типа; P_k – стоимость единицы продукции k -го типа; y_k – объем выпуска по k -му виду продукции; q_k – прогнозный спрос на продукцию k -го типа; T_k – срок

службы ОПФ k -го типа; T - горизонт планирования инвестиционного проекта; I - внешние инвестиции; \bar{I} - внутренние инвестиции; Dot_1 - дотации потребителям; Dot_2 - дотации производителям; A_m - амортизационные отчисления; W - прибыль; I_0 - общая сумма внешних инвестиций; K_0 - собственный капитал предприятия; M_0 - собственные средства потребителей; N_0 - собственные средства налогового центра; L_0 - максимальная сумма дотаций за весь период действия инвестиционного проекта; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ - соответственно налоги на добавленную стоимость (НДС), на имущество (НИ), на прибыль (НП), на доходы физических лиц (НДФЛ); ε_1 - процент возврата дотаций потребителем; ε_2 - процент возврата дотаций производителем; β - часть выручки, поступающая в фонд оплаты труда; r - ставка дисконтирования (средняя доходность проекта).

Тогда балансовые уравнения движения денежных средств принимают следующий вид [1]:

для производителя (инвестора)

$$DP = I + \bar{I} + Dot_2 - \sum_{k=1}^n c_k m_k + Am + W \geq 0$$

для потребителя

$$DC = M_0 + \beta R(t) + \varepsilon_1 Dot_1 - \sum_{k=1}^n q_k \geq 0$$

для управляющего регионального центра

$$DT = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_0 - (1 - \varepsilon_1) Dot_1 - (1 - \varepsilon_2) Dot_2 \geq 0.$$

Условия ограниченности сумм инвестиций и дотаций можно записать следующим образом:

$$I \leq I_0, \quad \bar{I} \leq K_0, \quad Dot_1 + Dot_2 \leq L_0.$$

Кроме того, выпуск продукции не должен превосходить производительности ОПФ, а объем продаж не превышает спроса:

$$0 \leq y_k \leq V_k$$

$$0 \leq P_k m_k y_k \leq q_k \quad (k = 1, \dots, n)$$

Спрос будем оценивать логистической кривой, выражающей, в частности, его зависимость от дохода $D = \beta R$ потребителя при фиксированных ценах:

$$q_i = \frac{k_i}{1 + b_i e^{a_i/D}}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где R – выручка от реализации по всем видам продукции.

В качестве критериев качества функционирования предприятия, потребителя и управляющего центра рассматриваются следующие показатели:

$$J_P = -\bar{I} - I - \varepsilon_2 Dot_2 + \frac{W + Am}{1 + r},$$

$$J_{cons} = -\varepsilon_2 Dot_2 + \frac{\beta R}{1 + r},$$

$$J_{Tax} = \frac{N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_0}{1 + r} - (1 - \varepsilon_1) Dot_1 - (1 - \varepsilon_2) Dot_2 \geq 0.$$

Их сумма, взятая с весовыми коэффициентами значимости, равна чистому приведенному доходу и является основным показателем эффективности инвестиционного проекта, который должен быть максимизирован с учетом всех описанных ограничений.

В данной работе были рассмотрены четыре вида экономической деятельности: добыча полезных ископаемых, обрабатывающие производства, производство и распределение электроэнергии, газа и воды и строительство.

Для решения задачи использовались стандартный, гибридный [2] и модифицированный алгоритмы [3]. В гибридном алгоритме наряду с глобальным поиском на каждом шаге эволюционного процесса осуществляется локальный поиск. В модифицированном алгоритме, по аналогии с природой, происходит разделение индивидов на два класса, обладающих разными характеристиками, при этом для скрещивания требуются представители разных классов.

Задача была решена с тремя разными наборами весовых коэффициентов значимости. В каждом случае модифицированный алгоритм находит решение, более эффективное с точки зрения инвестиционного проекта, чем решение, полученное двумя другими алгоритмами. Отсюда можно сделать вывод о том, что модифицированный алгоритм позволяет сделать более рациональный выбор вариантов инвестирования.

Список литературы

- [1] Медведев А.В. *Применение z-преобразования к исследованию многокритериальных линейных моделей регионального экономического развития* : монография / А.В.Медведев; Сиб.гос.аэрокосмич. ун-т. – Красноярск, 2008.
- [2] Бежитский С.С. *Гибридный эволюционный алгоритм для задач выбора эффективных вариантов систем управления* / С.С. Бежитский, Е.С. Семенкин, О.Э. Семенкина // Автоматизация и современные технологии. - № 11. – 2005.

- [3] Терновская М.А. *Разработка и исследование гибридного генетического алгоритма с двумя типами хромосом / М.А. Терновская // Актуальные проблемы экономики, информатики и права. – Сб. тез. VIII межсувозской научно-практической конференции преподавателей, аспирантов и студентов. – Красноярск: КФ МГУ ЭСИ, 2008.*

МЕТОД ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКОГО СКОРИНГА В ЗАДАЧАХ ОЦЕНКИ РИСКА БАНКРОТСТВА ПРЕДПРИЯТИЯ

М.И. Шерыкалова

Сибирский федеральный университет, Институт математики
Научный руководитель — к.ф.-м.н. Д.В. Семенова

Данная работа посвящена получению новых формул метода эвентологического скоринга, в основе которых лежит нечеткое событие, интерпретирующее анкетное. Метод эвентологического скоринга получает в настоящее время свое достаточно широкое распространение в различных областях жизнедеятельности человека: в спорте, психологии, философии, и, конечно же, в экономике. В настоящей работе также представлено построение модели метода для задачи оценки риска банкротства предприятия.

Итак, представим обобщенный метод эвентологического скоринга для расширенной анкеты. Данный метод применим к наиболее широкому классу задач, нежели каждый из методов, рассматриваемых ранее [1], [2], [3]. Данный факт объясняется тем, что появляется возможность вычисления распределения множества целевых событий (оценщик не привязан только к паре целевых событий, дополняющих друг друга). К тому же эксперты не привязаны к вопросам, предполагающим бинарные варианты ответов (преимущество использования анкеты расширенного типа). И, наконец, использование метода эвентологического скоринга, основанного на нечетком событии, интерпретирующем анкетное, позволяет получить эвентологическое распределение условных вероятностей целевых событий при наличии совокупности экспертных мнений. До настоящего времени построение подобного метода не проводилось.

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, а также множество измеримых событий $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, $\mathbb{S} \subseteq \mathfrak{F}$, при чем $\mathbb{S} \cap \mathfrak{X} = \emptyset$. Определим

$$ter(S) = \bigcap_{s \in S} s \bigcap_{s \in S^c} s^c, \quad S \subseteq \mathbb{S}.$$

Пусть $\mathfrak{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — множество вопросов об "избранных" факто-рах F_i соответственно ($i = 1, \dots, n$), описывающих состояние предприятия [4].

Обозначим D — множество событий-вариантов ответов, содержащее все возможные варианты ответов d на вопросы анкеты; $D_x \subseteq D$ — множество событий-вариантов ответов вопроса x , содержащее всевозможные значения ответов на вопрос x .

Определим $D_x^S \subseteq D$ — множество событий-ответов на вопрос x , которые благоприятствуют наступлению целевого события $ter(S)$, для всех $S \in \$$, $x \in \mathfrak{X}$ [4].

Необходимо отметить, что $\sum_{S \in \$} \sum_{x \in \mathfrak{X}} D_x^S = \mathfrak{X}$ (так как каждый вариант ответа на каждый вопрос анкеты благоприятствует наступлению только одного целевого события).

Тогда результат опроса экспертов $\tilde{t}_s(X)$ представим в виде (1).

$$\tilde{t}_s(X) = \sum_{S \in \$} (ter(S) \cap \tilde{Ter}_{X(S)}), \quad X \subseteq \mathfrak{X}, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{Ter}_{X(S)} &= \{Ter_{X_\mu(S)}, \mu \in \mathfrak{M}\}, \quad Ter_{X_\mu(S)} = \bigcup_{x \in X_\mu} \bigcup_{d \in D_x^S(\omega)} d, \\ X_\mu(S) &= \{x, x \in X_\mu, x \cap ter(S) = \emptyset\}, \quad X_\mu = \{x_\mu, x \in \mathfrak{X}\}, \mu \in \mathfrak{M}. \end{aligned} \quad (2)$$

Определение Обобщенный метод эвентологического скоринга для анкеты расширенного типа — это метод исчисления по известным вероятностям событий $P(d)$, $d \in D$ и известным условным вероятностям

$$P(ter(S) | d) = \frac{P(d \cap ter(S))}{P(d)}, \quad d \in D$$

распределения условных вероятностей случайных целевых событий (3) $ter(S) \in \$$ при условии, что наступило случайное \mathfrak{M} -нечеткое событие $\tilde{t}_s(X)$, определяемое (1).

$$P(ter(S) | \tilde{t}_s(X)) = \frac{P(ter(S) \cap \tilde{t}_s(X))}{P(\tilde{t}_s(X))}, \quad X \subseteq \mathfrak{X}. \quad (3)$$

Лемма (о формуле обобщенного метода эвентологического скоринга при условии наличия анкеты расширенного типа) Во введенных обозначениях, формула метода эвентологического скоринга при условии наличия анкеты расширенного типа и нечеткого события, интерпретирующего ан-

кетное, принимает вид

$$\mathbf{P}(ter(S) \mid \tilde{t}_s(X(S))) = \frac{\sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \mathbf{P} \left(\bigcup_{x \in X_\mu} \bigcup_{d \in D_x^S} (ter(S) \cap d) \right)}{\sum_{\mu \in \mathfrak{M}} \sum_{S \in \$} \mathbf{P} \left(\bigcup_{x \in X_\mu} \bigcup_{d \in D_x^S} (ter(S) \cap d) \right)}, \quad (4)$$

где $X_\mu(S) \subseteq \mathfrak{X}$, $\mu \in \mathfrak{M}$.

Доказательство Основано на свойстве аддитивности вероятности и эвентологической природе событий-террасок [1], [4].

Исходя из представленной формулы обобщенного метода эвентологического скоринга при условии наличия анкеты расширенного типа и нечеткого события, интерпретирующего анкетное, представляется возможным получение формул метода для различных нелокальных структур зависимостей [1]: непересекающейся структуры, $\$$ -независимой и вложенной структуры зависимости событий (подробнее смотрим в [4]).

Далее рассмотрим построение модели метода для задачи оценки риска банкротства предприятия.

Итак, пусть банкротство предприятия происходит в пределах вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$. Все события, которые могут потребоваться для оценки риска банкротства предприятия, делятся на два класса: анкетные события (происходят во время анкетирования) и базовые события (не происходят во время анкетирования, но о них идет речь в вопросах анкеты). Если базовые события наступают в дальнейшем, то они могут повлиять на целевое событие.

Базовые события Выберем $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ — конечное множество случайных событий из алгебры \mathfrak{F} . Определим \mathfrak{X} как множество базовых событий — множество событий, представляющих вопросы об уровнях значения "избранных" факторов (подробнее в [4]), которые отражают состояние предприятия:

$$\mathfrak{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

где x_i представляет собой i -ый вопрос о факторе F_i ($i = 1, \dots, n$). При этом, определим x_i как $x_i = \{x_i^1, x_i^2, x_i^3, x_i^4, x_i^5\}$, где x_i^j — событие-вопрос, конкретизирующий уровень фактора (именно в определении \mathfrak{X} отражается наличие анкеты расширенного типа).

Необходимо отметить, что подмножество $X \subseteq \mathfrak{X}$ представляет собой результат одного анкетирования.

Анкетное событие Определим совокупность экспертов \mathfrak{M} , производящих оценку состояния предприятия. Пусть $|\mathfrak{M}| = m$.

Каждому эксперту предлагается анкета расширенного типа.

После обработки опроса экспертов, получаем матрицу избранных событий $X_{\mathfrak{M}}$ (табл. 1), представляющую собой нечеткое событие, интерпретирующее анкетное.

x_1	$x_{1,\mu_1}^{j_1}$	$x_{1,\mu_2}^{j_2}$	\dots	$x_{1,\mu_m}^{j_3}$
x_2	$x_{2,\mu_1}^{j_4}$	$x_{2,\mu_2}^{j_5}$	\dots	$x_{2,\mu_m}^{j_6}$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_n	$x_{n,\mu_1}^{j_{2n-2}}$	$x_{n,\mu_2}^{j_{2n-1}}$	\dots	$x_{n,\mu_m}^{j_{2n}}$
	μ_1	μ_2	\dots	μ_m

Таблица 1: Матрица избранных событий $X_{\mathfrak{M}}$ после проведения экспертного опроса при условии анкеты расширенного типа, количество экспертов из \mathfrak{M} равно m ($|\mathfrak{M}| = m$), количество факторов из \mathfrak{X} равно n ($|\mathfrak{X}| = n$) коэффициенты j_i представляют собой уровни факторов присвоенных экспертами из \mathfrak{M} соответствующим факторам (в терминах нашей задачи $1 \leq j \leq 5$).

Таким образом, любому возможному результату анкетирования эксперта всегда можно сопоставить единственное подмножество событий-ответов $X_{\mathfrak{M}} \subseteq \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$.

Отметим, что произвольное подмножество имен событий $X_{\mathfrak{M}}$ определяется как

$$X_{\mathfrak{M}} = \tilde{X} = \{X_{\mu}, \mu \in \mathfrak{M}\},$$

где $X_{\mu} = \{x_{\mu}, x \in \mathfrak{X}\}$ описывает совокупность ответов эксперта μ на вопросы анкеты. Другими словами множество X_{μ} представляет собой множество подстолбцов $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$ ($X_{\mu} \subseteq \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$).

Необходимо сказать о том, что нечеткое событие, интерпретирующее анкетное, представляет собой некоторое фиксированное подмножество имен событий $\tilde{t}_s(X)$ из $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$.

Множество целевых событий В обобщенном методе эвентологического скоринга $\$$ — это множество целевых событий, задаваемых в виде таблицы, которая организована специальным образом и называется таблицей целевых событий. Эти события порождаются двумя непересекающимися группами событий $\{A, B\}$ (где, например, A — "предприятие обанкротится в ближайшие 3 года", B — "предприятие не обанкротится в ближайшие 3 года") и $\{a, b\}$ (где, например, a — "состояние предприятия скорее неблагоприятно, чем благоприятно", b — "состояние предприятия скорее благоприятно, чем неблагоприятно"), каждая из которых образует в сумме Ω . Например, таблица целевых событий может выглядеть подобно представленной на рисунке 1.

Таким образом, по имеющимся результатам оценок экспертов уровней

		<i>a</i>
		<i>b</i>
<i>A</i>	<i>B</i>	

Рис. 1: Таблица целевых событий \$.

факторов, характеризующих состояние предприятия, необходимо вычислить эвентологическое распределение множества целевых событий \$ [4].

Если эвентологическая структура зависимости базовых событий не известна заранее, то определить ее, как правило, не предоставляется возможным. В таких случаях необходимо руководствоваться следующими соображениями: согласно [1], существует три "крайних" структуры зависимости событий: непересекающаяся, независимая и вложенная. Любая другая структура зависимости двух событий лежит либо между непересекающейся и независимой структурами зависимостей двух событий (соответственно, значение корреляции попадает в интервал (-1;0)), либо между независимой и вложенной структурами зависимостей двух событий (соответственно, значение корреляции попадает в интервал (0;+1)) [2]. Таким образом, вычисленные распределения условных вероятностей заранее определенных целевых событий для всех трех структур зависимостей определяют границы изменения подобных распределений для всех других структур зависимостей.

Список литературы

- [1] Воробьев, О.Ю. Эвентологические структуры и эвентологический скоринг / О.Ю. Воробьев // *е~записки ФАМ Семинара*. — Красноярск: ИВМ СО РАН. — №8. С. 73-113.
- [2] Воробьев, О.Ю. Эвентологический скоринг в экономике, социологии, праве и бизнесе / О.Ю. Воробьев, Е.Е. Голденок // *Труды Третьей Всероссийской ФАМ конференции*, Ч.1. — Красноярск: ИВМ СО РАН 2004. — С. 113-128.
- [3] Трофимова, К.В. Обобщение метода эвентологического скоринга / К.В. Трофимова // *Труды Шестой Всероссийской ФАМ конференции / Под редакцией Олега Воробьева*. — Красноярск: ИВМ СО РАН. — 2007. — Ч. I. — С. 310-316.
- [4] Шерыкалова, М.И. Метод эвентологического скоринга для случая нечеткого события, интерпретирующего анкетное / М.И. Шерыкалова // *Труды IX международной ФАМЭТ'2009 конференции / под.ред. О.Ю. Воробьева*. — Красноярск: КГТЭИ, СФУ, 2010. — С. 329-334.

О ПОДГРУППАХ В $B(2, 5)$

А.А. Шлепкин

Сибирский федеральный университет, Институт космических и информационных технологий

Научный руководитель - к.ф.-м.н. А.А. Кузнецов

Проблема Бернсайда о периодических группах фиксированного периода была поставлена английским математиком У. Бернсайдом в 1902 году[4] в следующей форме: Пусть G группа порожденная m элементами в которой каждый элемент в степени n равен единичному элементу группы. Будет ли такая группа конечной? В последствии эти группы получили название свободных бернсайдовых групп и обозначение $B(m, n)$.

Перечислим известные к настоящему времени результаты по данным группам. $B(m, n)$ конечна для $n=2$ (тривиальный случай), $n=3$ (У. Бернсайд, 1902 [4]), $n=4$ ($m=2$ Бернсайд, 1902 [4]), для $m>2$ - И. Н. Санов, 1940 [5]), $n=6$ (М. Холл, 1958 [6]). $B(m, n)$ - бесконечна для нечетных $n > 665$ (С.И. Адян, П. С. Новиков, 1975 [7]); для достаточно больших четных n (С.В. Иванов, 1994 [8] И.Г. Лысенок 1996 [9]). Для других же показателей, наименьший из которых $n=5$, вопрос о конечности остается открытым.

Наибольший интерес представляют двупорожденная группа периода пять (группа $B(2, 5)$). Поскольку эта группа имеет наименьший показатель и наименьшее число порождающих элементов в сравнении с другими бернсайдовыми группами, конечность которых не определена. Кроме этого, достаточно хорошо изучена структура группы $B_0(2, 5)$, и если $B(2, 5)$ конечна, то эти группы изоморфны. Особый интерес вызывает тот факт, что при показателях $n=4$ и $n=6$ бернсайдовы группы конечны. Отметим, что структура конечных подгрупп группы $B(2, 5)$ не известна (кроме простейшего случая когда подгруппа циклическая порядка пять), в частности неизвестен ответ на следующий вопрос:

Существуют ли в $B(2, 5)$ нециклические конечные подгруппы?

Далее, неизвестен ответ и на такой вопрос:

Пусть G произвольная бесконечная двупорожденная группа периода пять, будет ли G изоморфна $B(2, 5)$?

В нашей работе получено достаточное условие положительного ответа, по крайней мере, на один из этих двух вопросов. Обозначим через $0,1$ порождающие элементы $B(2, 5)$.

Теорема. Пусть в $B(2, 5)$ выполнено следующее соотношение:

$$011010010110010101100101101001 = 101010011001101010011001101010 \quad (*)$$

тогда имеет место хотя бы одно из следующих двух утверждений:

1. Существуют неизоморфные бесконечные двупорожденные группы периода пять.

2. Группа $B(2, 5)$ содержит нециклические конечные подгруппы.

Доказательство. Если $B(2, 5)$ конечная группа, то как показано в [1,2,10] ее порядок равен 5^{34} и, следовательно имеет место утверждение 2 теоремы.

Пусть $B(2, 5)$ бесконечная группа. Положим $x = 01$, $y = 10$ и рассмотрим в $B(2, 5)$ подгруппу $H = \langle x, y \rangle$. Из (*) следует, что в $H = \langle x, y \rangle$ должно выполняться соотношение:

$$xyuxxuhxxuyxxyx = yyyuxxuyyuxxuyy \quad (**)$$

Используя вычисления из [11], показывается, что в $B(2, 5)$ не выполняется соотношение

$$011001000100110 = 111010111010111 \quad (***)$$

Таким образом H собственная подгруппа $B(2, 5)$ и H не изоморфна $B(2, 5)$. Теперь, если H бесконечная группа, то выполнено утверждение 1 теоремы. Пусть, теперь H конечная группа. Покажем что она отлична от циклической группы порядка пять. Предположим обратное. Тогда

$$H = \langle x, y \rangle = \langle x \rangle = \langle y \rangle$$

или:

$$H = \langle e, x, x^2, x^3, x^4 \rangle = \langle e, y, y^2, y^3, y^4 \rangle$$

- циклическая группа порядка пять. Здесь e - единица группы. В $B(2, 5)$ существует автоморфизм φ порядка 2 который на образующих 0,1 действует следующим образом : $\varphi = \{0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0\}$. Покажем, что $\varphi(x) = y$ и $\varphi(y) = x$:

$$\varphi(x) = \varphi(01) = \varphi(0)\varphi(1) = 10 = y,$$

$$\varphi(y) = \varphi(10) = \varphi(1)\varphi(0) = 01 = x.$$

Покажем теперь, что

$$\varphi(x) \neq x^2, \varphi(x) \neq x^3$$

Предположим противное. Пусть $\varphi(x) = x^2$, тогда $\varphi(x^2) = x$

Следовательно:

$$\varphi(x^4) = \varphi(x^2x^2) = x^2$$

т.е. $\varphi^2(x^4) \neq x^4$ - противоречие, поскольку порядок автоморфизма φ равен 2. Покажем, что $\varphi(x) \neq x^3$. Предположим противное - $\varphi(x) = x^3$. Тогда $\varphi(x^3) = x$ и, следовательно :

$$\begin{aligned}\varphi(x^4) &= \varphi(x)\varphi(x^3) = x^3x = x^4, \\ x^3 &= \varphi(x) = \varphi(x^{16}) = (\varphi(x^4))^4 = (x^4)^4 = x^{16} = x.\end{aligned}$$

Противоречие. Докажем далее, что $\varphi(x) \neq x^4$. Предположим противное. В этом случае

$$x^4 = \varphi(x) = y$$

т.е. $01010101=10 \Rightarrow 0101010101 = 0110 = e \Rightarrow 0^{-2} = 1^2 \Rightarrow (0^4)^2 = 1^2 \Rightarrow 0^3 = 1^3 \Rightarrow (0^3)^2 = (1^2)^2 \Rightarrow 0 = 1^4 \Rightarrow 0 = 1^{-1} \Rightarrow 01 = e, 10 = e$. Получили что $B(2, 5)$ - абелева, что невозможно. Теорема доказана.

В данном исследовании использовался суперкомпьютер ИКИТ СФУ. В составе комплекса находятся 224 вычислительных узла IBM Blade HS21. Каждый узел включает в себя 16 Gb оперативной памяти и два четырехядерных процессора Xeon quad core 2.33 GHz; два высокопроизводительных узла IBM System X 3950, объединенные в одну вычислительную систему по четыре четырехядерных процессора и 16 Gb оперативной памяти в каждом узле.

Список литературы

- [1] Appel K., Haken W. *Every planar map is four colorable. Part I, Discharging* // *Illinois J. Math.* 1977. № 21. P. 429-490.
- [2] Appel K., Haken W. *Every planar map is four colorable. Part II, Reducibility* // *Illinois J. Math.* 1977. № 21. P. 490-567.
- [3] Курош А.Г. *Теория групп.* СПб.: Лань, 2005. 648 с.
- [4] Burnside W. *On an unsettled question in the theory of distonctinupns groups* // *J. Pure Appl. Math.* 1902. № 33. P. 393-399.
- [5] Санов И.Н. *Решение проблемы Бернсаайда для периода 4* // Учен. записки ЛГУ. Сер. Матем. № 10. с. 166-170.
- [6] Hall M., Jr. *Solution of the Burnside problem for exponent six, III* // *J. Math.* 1958. № 2. P. 764-786.
- [7] Адян С.И. *Проблема Бернсаайда и тождество в группах.* М.: Наука. 1975. 335 с.
- [8] Ivanov S.V. *The free Burnside groups of sufficiently large exponents* // *Int. J. Algebra and Computation.* 1994 № 4.

- [9] Лысенок И. Г. Бесконечные бернсайдовы группы четного периода // Изв. РАН. Сер. Матем. 1996. 60 (3). с. 3-224
- [10] Кострикин А.И. Решение ослабленной проблемы бернсайда для показателя 5 // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1955. т. 19, № 3.
- [11] Кузнецов А.А. Шлепкин А.К. Сравнительный анализ бернсайдовых групп $B0(2,5)$ и $B(2,5)$. Труды института математики и механики УрО РАН. 2009 Том. 15, №2 . С. 19-23.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ ЭКОСИСТЕМЫ ОКЕАНА

С.В. Шуть

Сибирский федеральный университет, Институт математики
Научный руководитель — к.ф.-м.н. В.Е. Распопов

Данная работа посвящена разработке алгоритмов численного решения обратных коэффициентных задач и их реализации для математической модели вертикальной динамики экосистемы океана [1].

Задача 1. В области $Q = \{(t, x) / t \in (0, T), x \in (0, 1)\}$ требуется найти функции $P(t, x)$, $Z(t, x)$, $N(t, x)$ и коэффициент диффузии $K_Z(t)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= K_Z \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \omega_p \frac{\partial P}{\partial x} + a \frac{NP}{K_N + N} - \alpha_1 PZ - \beta_1 P + f_1, \\ \frac{\partial Z}{\partial t} &= K_Z \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \omega_z \frac{\partial Z}{\partial x} + (1 - \gamma_1) \alpha_1 PZ - \beta_2 Z + f_2, \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= K_Z \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - a \frac{NP}{K_N + N} - \gamma_1 \alpha_1 PZ + \beta_1 P + \beta_2 Z + f_3, \end{aligned} \quad (1)$$

начальным условиям

$$\begin{aligned} P(0, x) &= u_1(x), \\ Z(0, x) &= u_2(x), \\ N(0, x) &= u_3(x), \quad x \in [0, 1], \end{aligned} \quad (2)$$

краевым условиям

$$\begin{aligned} P(t, 0) &= \varphi_{11}(t), \quad P(t, 1) = \varphi_{12}(t), \\ Z(t, 0) &= \varphi_{21}(t), \quad Z(t, 1) = \varphi_{22}(t), \\ N(t, 0) &= \varphi_{31}(t), \quad N(t, 1) = \varphi_{32}(t), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3)$$

и условию переопределения

$$K_Z \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=0} = \psi(t), t \in [0, T]. \quad (4)$$

Все остальные параметры задачи считаются известными. Система дифференциальных уравнений описывает динамику концентраций фитопланктона $P(t, x)$, зоопланктона $Z(t, x)$ и растворенных биогенных веществ $N(t, x)$. Переменная t - время, x - глубина перемешиваемого слоя.

Предполагаем, что в рассмотренной области производная $\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=0}$ не обращается в нуль.

Считаем, что коэффициент K_Z зависит только от t либо является константой. Кроме того, предполагаем, что $K_Z \geq \delta > 0$, то есть в рассматриваемой системе (1), все уравнения параболического типа.

Поставленную задачу будем решать численно, для этого на равномерной сетке $\omega_{\tau h} = \{(t_n, x_i)/t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N, x_i = ih, i = 0, 1, \dots, M\}$ исходную дифференциальную задачу аппроксимируем разностной

$$\begin{aligned} \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\tau} &= K_Z \frac{p_{i+1}^{n+1} - 2p_i^{n+1} + p_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \omega_p \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{2h} + a \frac{y_i^n p_i^n}{K_N + y_i^n} - \alpha_1 p_i^n z_i^n - \beta_1 p_i^n + f_1, \\ \frac{z_i^{n+1} - z_i^n}{\tau} &= K_Z \frac{z_{i+1}^{n+1} - 2z_i^{n+1} + z_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \omega_z \frac{z_{i+1}^{n+1} - z_{i-1}^{n+1}}{2h} + (1 - \gamma_1) \alpha_1 p_i^n z_i^n - \beta_2 z_i^n + f_2, \\ \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} &= K_Z \frac{y_{i+1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1}}{h^2} - a \frac{y_i^n p_i^n}{K_N + y_i^n} - \gamma_1 \alpha_1 p_i^n z_i^n + \beta_1 p_i^n + \beta_2 z_i^n + f_3, \\ n &= 0, 1, \dots, (N - 1), i = 0, 1, \dots, (M - 1), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} p_i^0 &= u_1(x_i), z_i^0 = u_2(x_i), y_i^0 = u_3(x_i), i = 0, 1, \dots, M \\ p_0^n &= \varphi_{11}(t_n), p_M^n = \varphi_{12}(t_n), \\ z_0^n &= \varphi_{21}(t_n), z_M^n = \varphi_{22}(t_n), \\ y_0^n &= \varphi_{31}(t_n), y_M^n = \varphi_{32}(t_n), n = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

$$K_Z(t_n) \frac{-25p_0^n + 48p_1^n - 36p_2^n + 16p_3^n - 3p_4^n}{12h} = \psi(t_n), n = 0, 1, \dots, N \quad (6)$$

В уравнениях (5), (6) все коэффициенты и свободные члены $f_j(t, x)$, $j = 1, 2, 3$ берутся в узлах сетки. Уравнения (5) аппроксимируют уравнения (1) с первым порядком по τ и вторым по h . Уравнение (6) аппроксимирует условие переопределения (4) с четвертым порядком по h . Условие переопределения также аппроксимировали со вторым порядком по h , но при такой аппроксимации результат получается хуже.

Разностную задачу решаем итерационным методом. Задаем произвольно $K_Z(t)$ на нулевой итерации. С заданным K_Z решаем прямую задачу (5). Затем из условия (6) находим $K_Z(t)$ для следующей итерации. Итерации ведем до тех пор пока не будет выполнено условие:

$$\max_n |K_Z^{S+1}(t_n) - K_Z^S(t_n)| < \epsilon \quad (7)$$

где $(S + 1)$ и S - номера итераций, ϵ - задано. Задачу (5) при заданном $K_Z(t)$ на каждой итерации решаем последовательно по слоям по времени. На каждом слое по времени задача (5) представляет собой три системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами, которые решаются прогонкой. Разностная схема неявная, поэтому можно считать её абсолютно устойчивой. Абсолютная устойчивость подтверждилась расчетами. Расчеты были проведены и в тех случаях, когда правая часть $\psi(t)$ в (4) была задана на дискретном множестве значений аргумента. В этих случаях функцию заданную дискретно аппроксимировали интерполяционным кубическим сплайном. Далее расчеты проводились аналогично. На всех рассмотренных тестах процесс сошелся. С уменьшением шагов сетки численное решение сходится к точному.

Например, в случае теста

$$\begin{aligned} P(t, x) &= \frac{t^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{t}{10} + \frac{x^2}{12} + \frac{x}{3} + \frac{xt}{20} + 1, \\ Z(t, x) &= \frac{t^2}{7} + \frac{x^3}{3} + \frac{t}{15} + \frac{x^2}{9} + \frac{x}{6} + \frac{xt}{20} + 1, \\ N(t, x) &= \frac{t^2}{6} + \frac{x^3}{7} + \frac{t}{20} + \frac{x^2}{5} + \frac{x}{3} + \frac{xt}{20} + 1, \\ K_Z(t) &= t + 1 \end{aligned}$$

с непрерывно заданной функцией $\psi(t)$, при $\tau = 0.01$, $h = 0.01$, максимальная относительная погрешность численного решения составляет для $P(t, x) - 0.11\%$, для $Z(t, x) - 0.15\%$, для $N(t, x) - 0.009\%$ и для $K_Z(t) - 0.5\%$. В случае функции дискретного переменного $\psi(t_n)$ заданной в точках $t_n = 0.1n$, $n = \overline{1, 10}$, максимальная относительная погрешность составляет для $P(t, x) - 0.19\%$, для $Z(t, x) - 0.6\%$, для $N(t, x) - 0.01\%$ и для $K_Z(t) - 0.5\%$.

Для теста

$$\begin{aligned} P(t, x) &= e^{\frac{t}{5}} \sin x, \\ Z(t, x) &= e^{\frac{t}{2}} \sin 2x, \\ N(t, x) &= e^t \sin 2x, \\ K_Z(t) &= t + 1 \end{aligned}$$

с непрерывно заданной функцией $\psi(t)$, при $\tau = 0.01$, $h = 0.01$, максимальная относительная погрешность составляет для $P(t, x) - 0.05\%$, для $Z(t, x) - 0.1\%$, для $N(t, x) - 0.6\%$ и для $K_Z(t) - 1.1\%$. В случае функции дискретного переменного $\psi(t_n)$ заданной в точках $t_n = 0.1n$, $n = \overline{1, 10}$, максимальная относительная погрешность составляет для $P(t, x) - 0.05\%$, для

$Z(t, x) - 0.1\%$, для $N(t, x) - 0.6\%$ и для $K_Z(t) - 1.1\%$.

Задача 2. В области $Q = \{(t, x)/t \in (0, T), x \in (0, 1)\}$ требуется найти функции $P(t, x)$, $Z(t, x)$, $N(t, x)$ и коэффициент K_N , удовлетворяющие системе уравнений (1), начальным условиям(2), краевым условиям (3) и условию переопределения:

$$N(t, \xi) = B(t), \quad (8)$$

где $\xi \in (0, 1)$ - фиксированная точка. Все остальные параметры задачи считаются известными. Считаем, что коэффициент K_N зависит только от t либо является константой.

Поставленную задачу решаем численно, для этого на равномерной сетке $\omega_{\tau h} = \{(t_n, x_i)/t_n = n\tau, n = 0, 1..., N, x_i = ih, i = 0, 1..., M\}$ исходную дифференциальную задачу аппроксимируем разностной задачей (5).

Условие переопределения аппроксимируем точно, предполагая, что точке $x = \xi$ соответствует узел сетки с номером k

$$y_k^n = B(t_n), n = 0, 1..., N, kh = \xi. \quad (9)$$

Алгоритм численного решения разностной задачи следующий: Возьмем третье уравнение системы (1) и его явную разностную аппроксимацию:

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = K_Z I_k^n - a \frac{y_i^n p_i^n}{K_N + y_i^n} - \gamma_1 \alpha_1 p_i^n z_i^n + \beta_1 p_i^n + \beta_2 z_i^n + f_3, \quad (10)$$

где $I_k^n = \frac{-y_{k-2}^n + 16y_{k-1}^n - 30y_k^n + 16y_{k+1}^n - y_{k+2}^n}{12h^2}$. Подставляем в (10) $x = \xi$ и находим $K_N(t)$:

$$K_N(t_n) = \frac{aB(t_n)p_k^n}{K_N I_k^n - \gamma_1 \alpha_1 p_i^n z_i^n + \beta_1 p_i^n + \beta_2 z_i^n + f_3 - \left. \frac{dB(t)}{dt} \right|_{t=t_n}} - B(t_n) \quad (11)$$

Выраженное K_N подставляем в разностную задачу (5) и получаем прямую задачу. В уравнениях (5),(6) все коэффициенты и свободные члены $f_j(t, x)$ берутся в узлах сетки. Коэффициент K_N аппроксимируем с четвертым порядком по h . K_N также аппроксимировали со вторым порядком по h , но при такой аппроксимации результат получается хуже. Задачу (5) решаем последовательно по слоям по времени. На каждом слое по времени имеем три системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами, которые решаем прогонкой. Разностная схема неявная, поэтому можно считать её абсолютно устойчивой. Абсолютная устойчивость подтверждилась расчетами.

Предложенный алгоритм был реализован и протестирован на ряде примеров. Для каждого теста были рассмотрены различные варианты расположения точки ξ на интервале $(0, 1)$ и не зависимо от выбора этой точки, решение разностной задачи сходится к точному решению исходной задачи при шагах сетки стремящихся к нулю.

Например, для теста

$$P(t, x) = \frac{t^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{t}{10} + \frac{x^2}{12} + \frac{x}{3} + \frac{xt}{20} + 1$$

$$Z(t, x) = \frac{t^2}{7} + \frac{x^3}{3} + \frac{t}{15} + \frac{x^2}{9} + \frac{x}{6} + \frac{xt}{20} + 1$$

$$N(t, x) = \frac{t^2}{6} + \frac{x^3}{7} + \frac{t}{20} + \frac{x^2}{5} + \frac{x}{3} + \frac{xt}{20} + 1$$

$$K_N(t) = t + 1$$

при $\tau = 0.001$, $h = 0.001$, максимальная относительная погрешность численного решения составляет для $P(t, x) - 0.11\%$, для $Z(t, x) - 0.15\%$, для $N(t, x) - 0.009\%$ и для $K_N(t) - 0.5\%$ при $\xi = 0.25$; $P(t, x) - 0.11\%$, для $Z(t, x) - 0.15\%$, для $N(t, x) - 0.009\%$ и для $K_N(t) - 0.5\%$ при $\xi = 0.5$; $P(t, x) - 0.11\%$, для $Z(t, x) - 0.15\%$, для $Z(t, x) - 0.009\%$ и для $K_N(t) - 0.5\%$ при $\xi = 0.75$.

В случае

$$P(t, x) = e^{\frac{t}{5}} \sin x$$

$$Z(t, x) = e^{\frac{t}{2}} \sin 2x$$

$$N(t, x) = e^t \sin 2x$$

$$K_N(t) = t + 1$$

при $\tau = 0.001$, $h = 0.001$, максимальная относительная погрешность численного решения составляет для $P(t, x) - 0.25\%$, для $Z(t, x) - 0.01\%$, для $N(t, x) - 0.17\%$ и для $K_N(t) - 0.7\%$ при $\xi = 0.25$; $P(t, x) - 0.1\%$, для $Z(t, x) - 0.01\%$, для $N(t, x) - 0.08\%$ и для $K_N(t) - 0.87\%$ при $\xi = 0.5$; $P(t, x) - 0.02\%$, для $Z(t, x) - 0.01\%$, для $Z(t, x) - 0.02\%$ и для $K_N(t) - 0.5\%$ при $\xi = 0.75$.

Список литературы

- [1] Подгорный, К.А. *Модели водных экосистем: Интернет. Кафедра биофизики МГУ*. - 2004. // Интернет. (<http://dmb.biophys.tsu.ru>)
- [2] Самарский, А.А. *Численные методы решения обратных задач математической физики* / А.А. Самарский, П.Н. Вабищев - М.: Едиториал УРСС, 2004. - 480 с.
- [3] Ватулян, А.О. *Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела* / А.О. Ватулян - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. - 224 с.

Научное издание

ТРУДЫ
XLIII КРАЕВОЙ НАУЧНОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ
КОНФЕРЕНЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
И КОМПЬЮТЕРНЫМ НАУКАМ

Печатается в авторской редакции
Компьютерная верстка Р.В. Сорокин

Подписано в печать 11.10.10
Печать плоская
Усл. печ. л. 7.9
Тираж 50 экз.

Формат 60x84/16
Бумага офсетная
Заказ 2444

Отпечатано в полиграфическом центре
библиотечно-издательского комплекса
Сибирского федерального университета
660041 Красноярск, пр. Свободный, 82а