ПРИНЦИП СИММЕТРИИ ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

В.И. Кузоватов

Сибирский федеральный университет, Институт математики

Научный руководитель — д.ф.-м.н. А.М. Кытманов

Данная работа посвящена принципу симметрии для функций, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца в полупространстве. На данный момент такой принцип отражения имеет место для гармонических функций, а также для функций, являющихся решениями уравнения Гельмгольца вне шара [1], [3].

Теорема. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^k$ – область, симметричная относительно $\mathbb{R}^{k-1}$, т. е. если $(x', x_k) = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k) \in D$, то $(x', y_k) \in D$, где $y_k \in [-x_k, x_k]$. Обозначим через $\mathbb{R}^{k-1} = \{x = (x_1, \ldots, x_k) \mid x_k = 0\}$, $\Gamma = D \cap \mathbb{R}^{k-1}$. Если непрерывная на $D \cup \Gamma$ функция f удовлетворяет уравнению Гельмгольца $\Delta_k f + \lambda f = 0$ в "верхней половине" $D^+ = \{(x', x_k) \in D \mid x_k > 0\}$ области D и $f = 0$ на Γ, то она аналитически продолжается в D и удовлетворяет уравнению Гельмгольца во всей области D.*

Доказательство основано на представлении решения уравнения Гельмгольца в виде

$$f(x_1, \ldots, x_k) = h(x_1, \ldots, x_k) + \int\limits_0^{x_k} K(y_k, x_k, \lambda)\, h(x_1, \ldots, x_{k-1}, y_k)\, dy_k, \quad (1)$$

где функция $h(x_1, \ldots, x_k) \in C(D \cup \Gamma)$ есть решение уравнения $\Delta h = 0$ такое, что $h(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0) = 0$.

Подставляя (1) в уравнение Гельмгольца и интегрируя по частям, показывается, что (1) будет решением при условии, что функция K удовлетворяет дифференциальному соотношению

$$K''_{y_k y_k}(y_k, x_k, \lambda) - K''_{x_k x_k}(y_k, x_k, \lambda) - \lambda K(y_k, x_k, \lambda) = 0 \quad (2)$$

и начальным данным

$$K(0, x_k, \lambda) = 0, \qquad K(x_k, x_k, \lambda) = -\frac{\lambda}{2}\, x_k. \quad (3)$$

Заменой

$$x_k = \xi + \eta, \quad y_k = \eta \quad (4)$$

мы преобразуем (2) – (3) в задачу Гурса

$$\widetilde{K}''_{\eta\eta}(\xi,\eta,\lambda) - 2\widetilde{K}''_{\xi\eta}(\xi,\eta,\lambda) - \lambda\widetilde{K}(\xi,\eta,\lambda) = 0, \tag{5}$$

$$\widetilde{K}(\xi,0,\lambda) = 0, \qquad \widetilde{K}(0,\eta,\lambda) = -\frac{\lambda}{2}\,\eta, \tag{6}$$

где функция $\widetilde{K}(\xi,\eta,\lambda)$ получается из функции $K(y_k,x_k,\lambda)$ подстановкой замены координат вида (4).

Отметим, что задача (5) – (6) имеет единственное аналитическое решение [1], [2].

Нетрудно показать, что при заданной функции $K(y_k,x_k,\lambda)$ и данной функции f, решение интегрального уравнения Вольтерра (1) является гармоническим. Применяя принцип симметрии для гармонических функций [3] и используя аналитичность интеграла с переменным верхним пределом, получим утверждение теоремы.

Список литературы

[1] D.L. Colton. *Analytic theory of partial differential equations, Pitman advanced publishing program, 1980.*

[2] В.С. Владимиров. *Уравнения математической физики, Наука, 1981.*

[3] И. Стейн, Г. Вейс. *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, Мир, 1974.*