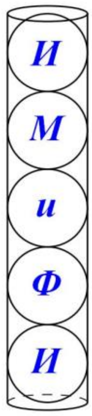
УНИВЕРСИТЕТСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 11-Х КЛАССОВ

2016 год

1) Студенты первого курса ИМиФИ СФУ Денис, Алёна и Сергей вместе выполняли задание по построению графиков функций. Денис построил на 3 графика меньше, чем Алёна и Сергей вместе. Сергей построил на 5 графиков меньше, чем Алёна и Денис вместе. Сколько графиков построила Алёна?



2) В цилиндрической упаковке находятся 5 сувенирных каменных шариков (см. рисунок). Найдите отношение пустого места к занятому в этой упаковке.

3) На лекции профессор разделил некоторое натуральное число на 333 и обнаружил, что сумма неполного частного (ненулевое число) и остатка равна 300. Студент Вася разделил то же самое число на 777 и тоже обнаружил, что сумма неполного частного (ненулевое число) и остатка равна 300. Найдите исходное число.

4) В символике ИМиФИ СФУ используются оранжевый, белый, чёрный и синий цвета. Абитуриент раскрасил квадратную таблицу 4×4 в эти цвета так, чтобы в каждой строке и каждом столбце был каждый из четырёх цветов. Может ли каждый из 555 абитуриентов раскрасить таблицу с выполнением этих условий, причём так, чтобы все их раскраски различались?

5) Команды математиков и физиков устроили эстафету с чётным числом этапов. У математиков каждый следующий пробегает свой этап на 1 секунду быстрее предыдущего, а у физиков – на 1 секунду медленнее предыдущего. К половине всей дистанции обе команды пробежали одинаковое расстояние, однако математики пришли к финишу первыми, опередив физиков на время, большее 1 минуты, но меньшее $1{,}5$ минуты. Найдите количество этапов эстафеты.

УНИВЕРСИТЕТСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 11-Х КЛАССОВ

РЕШЕНИЯ

1) Пусть Денис построил x графиков, Сергей – y графиков, а Алёна – z графиков. По условию $y+z-x=3$, $x+z-y=5$.

Значит, $2z=(y+z-x)+(x+z-y)=3+5=8$, а $z=4$.

Ответ: 4 графика.

2) Очевидно, что радиус основания цилиндра r равен радиусу одного шара, а высота цилиндра h равна сумме пяти диаметров шаров, то есть $h=10r$. Поэтому пять шаров занимают ровно $\frac{5\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2 h}=\frac{5\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}{10\pi r^3}=\frac{2}{3}$ объема цилиндра. Значит, отношение пустого места к занятому в этой упаковке есть $\frac{1-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$.

Ответ: $1:2$.

3) Из условия следует, что наше число $n=333a+p=777b+q$, где a и b – неполные частные, p и q – остатки. Кроме того, $a+p=b+q=300$. Вычтем из первого равенства второе, тогда $332a=776b$, откуда $83a=194b$. Значит, в силу взаимной простоты чисел 83 и 194 получим, что $a=194k$, $b=83k$, где k – натуральное число. Тогда двойное уравнение $a+p=b+q=300$ превращается в уравнение $194k+p=83k+q=300$, где k – натуральное, а p и q - целые неотрицательные числа. Значит, решение этого уравнения возможно только при $k=1$. Тогда $p=106$, $q=217$, $a=194$, $b=83$, $n=333\cdot194+106=777\cdot83+217=64708$.

Ответ: 64708.

4) Для удобства обозначим цвета: оранжевый, белый, чёрный и синий. Тогда для верхней строки таблицы существует $4!=24$ способа раскраски. Для каждого из 24 способов раскраски верхней строки существует $3!=6$ способов раскраски левого столбца. Рассмотрим один из способов раскраски верхней строки. Без ограничения общности можно считать, что клетки покрашены так, как это показано на рис. 5а.

Ч	*Б*	*О*	*С*

Рис. 5а

Пусть левый столбец покрашен в таком же порядке (ЧБОС), тогда вторую строку можно покрасить тремя способами, первый из которых дает два случая (см. рис. 5 б, в), а два других однозначно определяют раскраску таблицы (см. рис. 5 г, д). Следовательно, всего существует $24 \cdot 6 \cdot (3+1) = 24^2$ способов раскраски таблицы.

Ч	Б	О	С
Б	Ч	С	О
О	С	Б	Ч
С	О	Ч	Б

Рис. 5б

Ч	Б	О	С
Б	Ч	С	О
О	С	Ч	Б
С	О	Б	Ч

Рис. 5в

Ч	Б	О	С
Б	О	С	Ч
О	С	Ч	Б
С	Ч	Б	О

Рис. 5г

Ч	Б	О	С
Б	С	Ч	О
О	Ч	С	Б
С	О	Б	Ч

Рис. 5д

При любом другом способе раскраски левого столбца рассуждения аналогичны, только вместо второй строки рассматривается та строка, в которой самая левая клетка – белая. Итак, всего существует 576 способов раскраски.

Ответ: Да.

5) Обозначим число этапов за $2n$. Тогда команда математиков пройдёт $(n+1)$-й этап на n секунд быстрее, чем 1-й, $(n+2)$-й этап на n секунд быстрее, чем 2-й,…, $2n$-й этап на n секунд быстрее, чем n-й. Это значит, что всю вторую половину она пройдёт на n^2 секунд быстрее, чем первую половину. Аналогично, команда физиков вторую половину пройдёт на n^2 секунд медленнее, чем первую. Значит, разница во времени прохождения эстафеты составляет $2n^2$ секунд. Но единственный удвоенный квадрат в диапазоне от 60 до 90 есть число 72. Это означает, что $n = 6$, а всего было 12 этапов.

Ответ. 12.