

Лекции 12.03.2021; 19.03.2021; 26.03.2021

ТЕОРЕМА 20.7 (о структуре общего решения неоднородной системы дифференциальных уравнений). *Общее решение неоднородной системы*
$$Y' = AY + B$$

с непрерывными на $[a; b]$ коэффициентами и правыми частями, равно сумме общего решения соответствующей однородной системы $Y' = AY$ и частного решения \bar{Y} рассматриваемой неоднородной системы, т. е.

$$Y = \sum_{i=1}^n C_i Y_i + \bar{Y},$$

где Y_1, Y_2, \dots, Y_n - фундаментальная система решений однородной системы $Y' = AY$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем к операторному представлению систем:

$$Y' = AY + B \quad \leftrightarrow \quad L[Y] = B,$$

$$Y' = AY \quad \leftrightarrow \quad L[Y] = O.$$

По условию теоремы $L[\bar{Y}] = B$, $L[Y_i] = O$.

Тогда, в силу линейности оператора L , имеем:

$$\begin{aligned} L\left(\sum_{i=1}^n C_i Y_i + \bar{Y}\right) &= L\left(\sum_{i=1}^n C_i Y_i\right) + L(\bar{Y}) = \sum_{i=1}^n C_i L(Y_i) + L(\bar{Y}) = \\ &= \sum_{i=1}^n C_i \cdot O + B = B. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА (о наложении решений).

Если Y_i – решения неоднородных систем

$$Y' = AY + B_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

то их сумма $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_m$ является решением неоднородной системы

$$Y' = AY + (B_1 + B_2 + \dots + B_m).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем к операторному представлению систем:

$$Y' = AY + B_i \quad \leftrightarrow \quad L[Y] = B_i,$$

$$Y' = AY + \sum_{i=1}^m B_i \quad \leftrightarrow \quad L[Y] = \sum_{i=1}^m B_i.$$

По условию теоремы

$$L[Y_i] = B_i \quad (i = \overline{1, m}).$$

Тогда, в силу линейности оператора L , имеем:

$$L\left[\sum_{i=1}^m Y_i\right] = \sum_{i=1}^m L[Y_i] = \sum_{i=1}^m B_i. \quad \blacksquare$$

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$Y' = AY + F(t) \quad (1)$$

или

$$y'_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} y_k + f_i(t), \quad (1')$$

в которой коэффициенты a_{ik} , $i, k = 1, 2, \dots, n$ - постоянные, т.е. A - постоянная матрица.

Систему (1') можно проинтегрировать путем сведения ее к уравнению n -го порядка с постоянными коэффициентами (методом исключения), которое будет также линейным уравнением с постоянными коэффициентами. Однако такой метод удобно применять для систем второго порядка ($n = 2$). Процесс получения дифференциального уравнения n -го порядка довольно трудоемкий и требует аккуратности. Другой способ построения решения системы уравнений (1) - найти фундаментальную систему решений (ФСР) соответствующего однородного уравнения

$$Y' = AY, \quad (2)$$

а затем найти общее решение неоднородной системы (1') методом вариации постоянной. Этот путь, как правило, менее трудоемкий.

ФСР линейной однородной системы с постоянными коэффициентами связана с собственными векторами ее матрицы.

П.1 Вспомогательные утверждения (из линейной алгебры)

П.2 Метод Эйлера.

Рассмотрим систему

$$y'_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} y_k. \quad (2')$$

Очевидно, система (2) имеет нулевое решение $Y \equiv 0$. Будем искать нетривиальное решение системы.

Вид уравнений системы позволяет предположить, что решения следует искать среди таких функций, производные которых «похожи» на сами функции. Среди элементарных функций таким свойством обладает показательная функция. Поэтому частные решения будем искать в виде

$$y_1 = d_1 e^{\lambda x}, y_2 = d_2 e^{\lambda x}, \dots, y_n = d_n e^{\lambda x}, \quad (3)$$

где $\lambda, d_1, d_2, \dots, d_n$ - неизвестные действительные числа, которые нужно подобрать так, чтобы функции (3) удовлетворяли системе (2').

Запишем систему (2') в матричном виде, т.е. в виде (2)

$$Y' = AY,$$

где

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

По предположению,

$$Y = \begin{pmatrix} d_1 e^{\lambda x} \\ d_2 e^{\lambda x} \\ \dots \\ d_n e^{\lambda x} \end{pmatrix} = e^{\lambda x} \mathbf{D}, \text{ где } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$Y' = \begin{pmatrix} d_1 \lambda e^{\lambda x} \\ d_2 \lambda e^{\lambda x} \\ \dots \\ d_n \lambda e^{\lambda x} \end{pmatrix} = e^{\lambda x} \mathbf{D}.$$

Подставим Y и Y' в (2) и получим

$$\lambda e^{\lambda x} \mathbf{D} = A \cdot (e^{\lambda x} \mathbf{D}).$$

Разделим обе части последнего уравнения на $e^{\lambda x}$

$$\lambda \mathbf{D} = A \cdot \mathbf{D},$$

т.е.

$$\lambda \mathbf{D} - A \cdot \mathbf{D} = \mathbf{0},$$

или

$$(A - \lambda E) \cdot \mathbf{D} = \mathbf{0}, \quad (4)$$

где E - единичная матрица порядка n .

Уравнение (4) представляет собой матричную запись системы n уравнений с n неизвестными. Чтобы такая система имела нетривиальное решение необходимо, чтобы определитель матрицы $(A - \lambda E)$ равнялся нулю, т.е.

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Это означает, что λ должно являться собственным значением (корнем характеристического многочлена) матрицы A , а \mathbf{D} – ее собственным вектором, относящимся к λ .

Матрица A имеет n характеристических корней, но среди них могут быть комплексные и кратные.

П.2.1 Характеристические корни матрицы A действительны и различны

Если матрица A имеет n действительных и различных корней, то для каждого характеристического корня λ_i ($i = \overline{1, n}$) найдем собственный вектор $\mathbf{D}_i = (d_{ij})$ и запишем решение $Y_i = e^{\lambda_i x} \mathbf{D}_i$:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} d_{11} e^{\lambda_1 x} \\ d_{21} e^{\lambda_1 x} \\ \dots \\ d_{n1} e^{\lambda_1 x} \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} d_{12} e^{\lambda_2 x} \\ d_{22} e^{\lambda_2 x} \\ \dots \\ d_{n2} e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}, \dots, Y_n = \begin{pmatrix} d_{1n} e^{\lambda_n x} \\ d_{2n} e^{\lambda_n x} \\ \dots \\ d_{nn} e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим определитель Вронского этих решений:

$$W[Y_1, Y_2, \dots, Y_n] = \begin{vmatrix} d_{11}e^{\lambda_1 x} & d_{12}e^{\lambda_2 x} & \dots & d_{1n}e^{\lambda_n x} \\ d_{21}e^{\lambda_1 x} & d_{22}e^{\lambda_2 x} & \dots & d_{2n}e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1}e^{\lambda_1 x} & d_{n2}e^{\lambda_2 x} & \dots & d_{nn}e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} \cdot e^{\lambda_2 x} \cdot \dots \cdot e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Определитель Вронского не равен нулю, так как все собственные векторы D_i относятся к различным собственным значениям, то они линейно независимы (свойство собственных векторов). А так как $W[Y_1, Y_2, \dots, Y_n] \neq 0$, то решения Y_1, Y_2, \dots, Y_n линейно независимы и образуют ФСР. Общее решение системы в этом случае имеет вид

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \dots + C_n Y_n,$$

или

$$\begin{cases} y_1 = C_1 d_{11} e^{\lambda_1 x} + C_2 d_{12} e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n d_{1n} e^{\lambda_n x} \\ y_2 = C_1 d_{21} e^{\lambda_1 x} + C_2 d_{22} e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n d_{2n} e^{\lambda_n x} \\ \dots \\ y_{2n} = C_1 d_{n1} e^{\lambda_1 x} + C_2 d_{n2} e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n d_{nn} e^{\lambda_n x} \end{cases}.$$

Пример1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x' = -3x + 4y - 2z \\ y' = x + z \\ z' = 6x - 6y + 5z \end{cases}$$

Решение: Для матрицы системы составим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -3 - \lambda & 4 & -2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 6 & -6 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 1) = 0. \text{ Оно имеет три}$$

различных действительных корня $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$. Найдем соответствующие им собственные векторы.

Собственный вектор $\bar{h}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, отвечающий $\lambda_1 = 2$, удовлетворяет системе

$$(A - \lambda_1 E) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} -5a + 4b - 2c = 0 \\ a - 2b + c = 0 \\ 6a - 6b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b + c = 0 \\ 2b - c = 0. \end{cases}$$

Пусть $b = 1$, тогда $c = 2$ и $a = 0$. Следовательно, $\lambda_1 = 2$ отвечает собственный вектор $\overline{h}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Значению $\lambda_2 = 1$ отвечает вектор $\overline{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, а $\lambda_3 = -1$ – вектор $\overline{h}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Проверить Самостоятельно!!!!

Так как собственные векторы $\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3$ матрицы A относятся к различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, то они линейно независимы. (свойство 3 для собственных векторов матрицы).

Таким образом получили ФСР

$$X_1 = h_1 e^{2t}, \quad X_2 = h_2 e^t, \quad X_3 = h_3 e^{-t}.$$

Тогда, в соответствии с определением общего решения однородной системы

$$X(t) = \sum_{i=1}^n C_i X_i,$$

Общее решение заданной системы имеет вид:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^t + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-t},$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

Ответ: $x = C_2 e^t + C_3 e^{-t}, y = C_1 e^{2t} + C_2 e^t, z = 2C_1 e^{2t} - C_3 e^{-t}$.

П.2.2 Характеристические корни матрицы A различны, но среди них есть комплексные

Так как характеристический многочлен матрицы A имеет действительные коэффициенты, то комплексные корни будут появляться сопряженными парами. Пусть, например, характеристическими корнями являются числа

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i, \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i.$$

Рассмотрим две системы n линейных однородных уравнений с n неизвестными:

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{O} \quad \text{и} \quad (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{O}.$$

В алгебре доказано, что если для них выбрать одни и те же переменные свободными и придать им сопряженные значения, то для зависимых переменных тоже получаться сопряженные значения.

Пусть $\mathbf{D} = (d_{j1})$ – решение системы $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{O}$. Тогда $\bar{\mathbf{D}} = (\bar{d}_{j1})$ – решение системы $(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{O}$. Рассмотрим матрицы-столбцы

$$\mathbf{Z}_1 = e^{\lambda_1 x} \mathbf{D} = e^{(\alpha+i\beta)x} \mathbf{D} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} \mathbf{D} = e^{\alpha x} \cdot (\cos \beta x + i \sin \beta x) \mathbf{D},$$

$$\mathbf{Z}_2 = e^{\lambda_2 x} \bar{\mathbf{D}} = e^{(\alpha-i\beta)x} \bar{\mathbf{D}} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} \bar{\mathbf{D}} = e^{\alpha x} \cdot (\cos \beta x - i \sin \beta x) \bar{\mathbf{D}}.$$

В силу выбора \mathbf{D} и $\bar{\mathbf{D}}$ эти матрицы-столбцы \mathbf{Z}_1 и \mathbf{Z}_2 будут удовлетворять матричному уравнению $\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}$. Полагаем далее

$$\mathbf{Y}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2), \quad \mathbf{Y}_2 = \frac{1}{2i}(\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2).$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что \mathbf{Y}_1 и \mathbf{Y}_2 состоят из действительных функций и тоже удовлетворяют матричному уравнению $\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}$. Более того, можно доказать, что \mathbf{Y}_1 и \mathbf{Y}_2 линейно независимы и, следовательно, могут быть включены в фундаментальную систему решений.

Пример. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 - y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2, \\ y_3' = 3y_1 + y_3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Так как данная система – линейная однородная с постоянными коэффициентами, то ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

1) Матрица системы: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Запишем ее характеристическую матрицу и найдем характеристический многочлен:

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1 - \lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = (1 - \lambda)[(1 - \lambda)^2 + 4].$$

Найдем характеристические корни:

$$(1 - \lambda)[(1 - \lambda)^2 + 4] = 0,$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i.$$

2) Действительный корень $\lambda_1 = 1$ является собственным значением матрицы \mathbf{A} . Найдем собственный вектор матрицы, относящийся к этому собственному значению. Имеем:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 - 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 - 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 = 0, \\ 3x_1 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2, в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$. Тогда переменные x_1, x_2 будут зависимыми, а x_3 свободной. Общее решение при этом будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_2 = -x_3, \\ x_1 = 0. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем $x_3 = 1$ и находим его:

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что \mathbf{D}_1 – собственный вектор матрицы \mathbf{A} , относящийся к собственному значению $\lambda_1 = 1$. Следовательно, решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y}_1 = e^x \mathbf{D}_1 = e^x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^x \\ e^x \end{pmatrix}.$$

3) Возьмем один из комплексных корней, например $\lambda_2 = 1 + 2i$, и найдем фундаментальную систему решений системы $(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}$.

Имеем:

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 - (1 + 2i) & -1 & -1 \\ 1 & 1 - (1 + 2i) & 0 \\ 3 & 0 & 1 - (1 + 2i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2i & -1 & -1 \\ 1 & -2i & 0 \\ 3 & 0 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -2ix_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2ix_2 = 0, \\ 3x_1 - 2ix_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2, в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор $\begin{vmatrix} -2i & 0 \\ 0 & -2i \end{vmatrix}$. Тогда переменные x_2, x_3 будут зависимыми, а x_1 свободной. Общее решение при этом будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{x_1}{2i}, \\ x_3 = \frac{3x_1}{2i}. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем $x_3 = 2i$ и находим его:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда
$$\mathbf{Z} = e^{(1+2i)x} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = e^x \cdot (\cos 2x + i \sin 2x) \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \mathbf{Z} = e^x \cdot \begin{pmatrix} -2 \sin 2x + i \cdot 2 \cos 2x \\ \cos 2x + i \cdot \sin 2x \\ 3 \cos 2x + i \cdot 3 \sin 2x \end{pmatrix} = e^x \cdot \begin{pmatrix} -2 \sin 2x \\ \cos 2x \\ 3 \cos 2x \end{pmatrix} + i e^x \cdot \begin{pmatrix} 2 \cos 2x \\ \sin 2x \\ 3 \sin 2x \end{pmatrix}$$

Откуда находим

$$\mathbf{Y}_1 = \operatorname{Re} \mathbf{Z} = e^x \cdot \begin{pmatrix} -2 \sin 2x \\ \cos 2x \\ 3 \cos 2x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2 = \operatorname{Im} \mathbf{Z} = e^x \cdot \begin{pmatrix} 2 \cos 2x \\ \sin 2x \\ 3 \sin 2x \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3$ образуют фундаментальную систему решений и, следовательно, общее решение системы имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= C_1 \mathbf{Y}_1 + C_2 \mathbf{Y}_2 + C_3 \mathbf{Y}_3 = \\ &= C_1 e^x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} -2 \sin 2x \\ \cos 2x \\ 3 \cos 2x \end{pmatrix} + C_3 e^x \cdot \begin{pmatrix} 2 \cos 2x \\ \sin 2x \\ 3 \sin 2x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

или, подробнее,

$$\begin{cases} y_1 = & -2C_2 e^x \sin 2x + 2C_3 e^x \cos 2x, \\ y_2 = -C_1 e^x + C_2 e^x \cos 2x + C_3 e^x \sin 2x, \quad \diamond \\ y_3 = C_1 e^x + 3C_2 e^x \cos 2x + 3C_3 e^x \sin 2x. \end{cases}$$

П.2.3 Характеристические корни матрицы A действительны, но среди них есть кратные.

Пусть λ — действительный характеристический корень матрицы A , k — его кратность, $r = \operatorname{rang}(A - \lambda E)$.

На практике возможны два случая:

1. $n - r = k$;
2. $n - r \neq k$.

Рассмотрим эти случаи отдельно.

1 случай. Пусть $n - r = k$. В этом случае ФСР системы линейных однородных уравнений $(A - \lambda E) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{0}$ состоит из k решений.

Следовательно, существует k линейно независимых собственных векторов $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_k$ матрицы A , относящихся к собственному значению λ . Тогда решения системы дифференциальных уравнений $Y_i = e^{\lambda x} \mathbf{h}_i, \quad \overline{i = 1, k}$ линейно независимы и входят в ФСР этой системы.

Пример 4. Найдем общее решение системы

$$\begin{cases} x' = 4x - y - z \\ y' = x + 2y - z. \\ z' = x - y + 2z \end{cases}$$

Решение. Найдем собственные значения матрицы системы, составив характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -1 & -1 \\ 1 & 2 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda - 3)^2 = 0.$$

Один корень уравнения $\lambda_1 = 2$ - простой, другой, $\lambda_2 = 3$, имеет кратность 2.

Найдем собственный вектор h_1 , соответствующий $\lambda_1 = 2$, решая систему уравнений

$$(A - \lambda_1 E) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 2a - b - c = 0 \\ a - c = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0, \\ a - c = 0. \end{cases}$$

Полагая $a = 1$, получим $b = c = 1$ и, следовательно,

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Составим уравнение для нахождения собственного вектора, соответствующего $\lambda_2 = 3$.

$$(A - \lambda_2 E) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная система равносильна одному уравнению

$$a - b - c = 0.$$

Откуда следует, что ранг матрицы $(A - \lambda_2 E)$ равен 1, $n - r = 3 - 1 = 2$ - кратность корня $\lambda_2 = 3$. Следовательно, для $\lambda_2 = 3$ можно указать два линейно независимых решения, например, такие

$$a = 1, b = 1, c = 0 \text{ и } a = 1, b = 0, c = 1.$$

Эти решения определяют два линейно независимых собственных вектора

Решение. Найдем решение методом Эйлера. Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
 Запишем ее характеристическую матрицу и найдем характеристический многочлен:

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix}.$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0, \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2.$$

Характеристический корень кратности $k = 2$. При этом (т.к. $|A - \lambda E| = 0$)
 $r = \text{rang}(A - \lambda E) = 1$. Т.е. $n - r = 1 \neq k, n - r < k$.

Будем искать решение системы методом неопределенных коэффициентов

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a + bt \\ c + dt \end{pmatrix},$$

т.е.

$$x = (a + bt)e^{2t}, \quad y = (c + dt)e^{2t}.$$

Подставим x и y в исходную систему.

Для этого необходимо найти x' и y' .

$$x' = (2a + 2bt + b)e^{2t}, \quad y' = (2c + 2dt + d)e^{2t}.$$

Подставляя x, x', y, y' в исходную систему получим

$$\begin{cases} (2a + 2bt + b)e^{2t} = (a + bt - c - dt)e^{2t}, \\ (2c + 2dt + d)e^{2t} = (a + bt + 3c + 3dt)e^{2t}. \end{cases}$$

Или, после сокращения на e^{2t} :

$$\begin{cases} 2a + 2bt + b = a + bt - c - dt, \\ 2c + 2dt + d = a + bt + 3c + 3dt; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a + b + c) + (b + d)t = 0, \\ (-a - c + d) - (b + d)t = 0. \end{cases}$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях t , получим:

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ -a - c + d = 0, \\ -b - d = 0, \\ b + d = 0. \end{cases}$$

Из последней системы, после преобразований, получаем

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ b + d = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2. В качестве базисного минора можно взять, например, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Тогда переменные a и b будут зависимыми, c и d – свободными. Общее решение при этом будет иметь вид:

$$\begin{cases} a = d - c, \\ b = -d. \end{cases}$$

Найдем фундаментальную систему решений:

$$d = 1, c = 0 \Rightarrow a = 1, b = -1; \quad (1^*)$$

$$d = 0, c = 1 \Rightarrow a = -1, b = 0. \quad (2^*)$$

Первое из решений фундаментальной системы (1*) дает для системы дифференциальных уравнений решение

$$X_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix},$$

второе решение (2*) из фундаментальной системы дает решение

$$X_2 = e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найденные решения X_1 и X_2 образуют ФСР и, следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотренный пример показывает, что для нахождения решения системы уравнений второго порядка приходится решать систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Если порядок системы будет 3, то алгебраическая система будет содержать минимум шесть неизвестных (а возможно и девять). Т.е. указанный способ решения является достаточно трудоемким.

Второй способ (с помощью жордановой формы) – найти m линейно независимых решений системы дифференциальных уравнений, а недостающие $k - m$ решений искать в виде

$$\begin{aligned} Y_{m+1} &= e^{\lambda t} (\bar{h}_{m+1,0} + \bar{h}_{m+1,1} \cdot t), \\ Y_{m+2} &= e^{\lambda t} \left(\bar{h}_{m+2,0} + \bar{h}_{m+2,1} \cdot t + \bar{h}_{m+2,2} \cdot \frac{t^2}{2} \right), \\ Y_{m+3} &= e^{\lambda t} \left(\bar{h}_{m+3,0} + \bar{h}_{m+3,1} \cdot t + \bar{h}_{m+3,2} \cdot \frac{t^2}{2} + \bar{h}_{m+3,3} \cdot \frac{t^3}{3} \right) \end{aligned}$$

и т.д. Здесь $\bar{h}_{i,j}$ числовые векторы - столбцы, определяемые так, чтобы Y_i были решениями системы дифференциальных уравнений.

На практике чаще всего встречаются системы дифференциальных уравнений 2-го и 3-го порядка. Далее мы рассмотрим метод решения с помощью жордановой формы для $n = 2$ и $n = 3$.

Пусть $n = 2$ (т.е. система второго порядка),

$$Y' = AY; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

λ – корень кратности 2, ранг характеристической матрицы $\text{rang}(A - \lambda E) = 1$. Т.е. $n - r = m; 2 - 1 = 1 < 2$. Это означает, что для собственного числа λ матрицы A существует только один собственный вектор h_1 .

$Y_1 = e^{\lambda t} h_1$ – решение системы. Еще одно решение системы дифференциальных уравнений будем искать в виде

$$Y_2 = e^{\lambda t} (h_{20} + h_{21} t).$$

Тогда

$$Y_2' = e^{\lambda t}(\lambda h_{20} + \lambda h_{21}t + h_{21}).$$

Подставляя Y_2' и Y_2 в исходную систему, получаем

$$e^{\lambda t}(\lambda h_{20} + \lambda h_{21}t + h_{21}) = A \cdot e^{\lambda t}(h_{20} + h_{21}t).$$

Сокращая обе части уравнения на $e^{\lambda t}$ будем иметь:

$$\lambda h_{20} + \lambda h_{21}t + h_{21} = A \cdot h_{20} + A \cdot h_{21}t.$$

В последнем уравнении приравняем коэффициенты при равных степенях t , тогда векторы h_{20} и h_{21} будут удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} \lambda h_{21} = A \cdot h_{21}, \\ \lambda h_{20} + h_{21} = A \cdot h_{20}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \cdot h_{21} - \lambda h_{21} = 0, \\ A \cdot h_{20} - \lambda h_{20} = h_{21}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A - \lambda E) \cdot h_{21} = 0, \\ (A - \lambda E) \cdot h_{20} = h_{21}. \end{cases}$$

Первое уравнение полученной системы означает, что h_{21} – собственный вектор матрицы A , относящийся к собственному значению λ . Поэтому мы можем полагать $h_{21} = h_1$. Тогда второе уравнение системы запишется в виде

$$(A - \lambda E) \cdot h_{20} = h_1,$$

т.е. в качестве вектора h_{20} можно взять любое решение системы линейных уравнений $(A - \lambda E) \cdot H = h_1$.

Таким образом, если $k = 2, n - r = 1$, то рассматриваемая система имеет решения

$$Y_1 = e^{\lambda t}h_1 \quad \text{и} \quad Y_2 = e^{\lambda t}(h_2 + h_1t), \quad (3^*)$$

где h_1 - собственный вектор матрицы A , относящийся к собственному значению λ , h_2 - любое решение системы линейных уравнений $(A - \lambda E) \cdot H = h_1$.

Найденные таким образом решения Y_1 и Y_2 входят в ФСР, так как они линейно независимы (**Проверить самостоятельно!!!!**).

При получении формул (3*) мы не использовали тот факт, что система уравнений второго порядка. Эти формулы будут справедливы и для системы любого порядка при $k = 2, n - r = 1$.

Вектор h_2 называется присоединенным вектором.

Цепочка векторов, состоящая из собственного вектора h_1 и присоединенного вектора h_2 является линейно независимой (**доказать!!!!**) и называется жордановой цепочкой.

Пример 6. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases}$$

Решение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 3.$$

Матрица системы имеет одно собственное значение $\lambda = 3$ с кратностью $k = 2$. Найдем ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 - 3 & -1 \\ 1 & 4 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\text{rang}(A - \lambda E) = 1$. Т.е. $n - r = 1 \Rightarrow$ существует один собственный вектор, соответствующий $\lambda = 3$. Найдем этот вектор:

$$\begin{pmatrix} 2 - 3 & -1 \\ 1 & 4 - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0, \Rightarrow \begin{cases} -a - b = 0, \\ a + b = 0, \end{cases} \Rightarrow a = -b.$$

Пусть $b = 1$, тогда $a = -1$. Т.е. $h_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $X_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$.

Для построения общего решения найдем присоединенный вектор h_2 из матричного уравнения

$$(A - \lambda E)h_2 = h_1, \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a - b = -1, \\ a + b = 1, \end{cases} \Rightarrow a = 1 - b.$$

Пусть $b = 0$, тогда $a = 1$, и $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, второе решение системы будет иметь вид $X_2 = (h_1 t + h_2) e^{3t}$, т.е.

$$X_2 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^{3t}.$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений описывается формулой

$$X(t) = C_1 X_1 + C_2 X_2 = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^{3t}.$$

Ответ: $x(t) = (-C_1 + C_2 - C_2 t) e^{3t}$, $y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{3t}$.

Для системы уравнений третьего порядка ($n = 3$) кратность корня может равняться двум ($k = 2$) или трём ($k = 3$). Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

- а) Пусть λ_1 — простой корень, а λ_2 - корень кратности $k = 2$. Простому корню λ_1 соответствует собственный вектор h_1 и решение системы

$$Y_1 = e^{\lambda_1 t} h_1.$$

Для корня λ_2 , в случае если $\text{rang}(A - \lambda E) = 1$, т.е. $n - r = 2$, существуют два линейно независимых вектора h_2 и h_3 . Тогда $Y_2 = e^{\lambda_2 t} h_2$, $Y_3 = e^{\lambda_2 t} h_3$ - решения системы. Функции Y_1, Y_2, Y_3 образуют ФСР(почему???) и общее решение системы будет иметь вид

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + C_3 Y_3 = C_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + (C_2 h_2 + C_3 h_3) e^{\lambda_2 t}.$$

- б) Пусть λ_1 – простой корень, а λ_2 – корень кратности $k = 2$. Простому корню λ_1 соответствует собственный вектор h_1 и решение системы

$$Y_1 = e^{\lambda_1 t} h_1.$$

Для корня λ_2 , в случае если $\text{rang}(A - \lambda E) = 2$, т.е. $n - r = 1$, существует один собственный вектор h_2 . Соответственно, решение системы

$$Y_2 = e^{\lambda_2 t} h_2.$$

Третье решение системы из ФСР Y_3 будет иметь вид

$$Y_3 = e^{\lambda_2 t} (h_3 + h_2 t),$$

где h_2 – собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному значению λ_2 , а h_3 – присоединенный вектор, который определяется из уравнения

$$(A - \lambda_2 E) \cdot h_3 = h_2.$$

Общее решение системы в этом случае запишется в виде

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + C_3 Y_3 = C_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} h_2 + C_3 e^{\lambda_2 t} (h_3 + h_2 t).$$

- с) Пусть λ – корень кратности 3 ($k = 3$). Если $\text{rang}(A - \lambda E) = 0$, $n - r = 3$. В этом случае матрица A имеет три линейно независимых собственных вектора h_1, h_2 и h_3 относящихся к собственному значению λ и, следовательно, $Y_1 = e^{\lambda t} h_1, Y_2 = e^{\lambda t} h_2$ и $Y_3 = e^{\lambda t} h_3$ – решения системы.

Функции Y_1, Y_2, Y_3 образуют ФСР, и общее решение системы будет иметь вид

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + C_3 Y_3 = (C_1 h_1 + C_2 h_2 + C_3 h_3) e^{\lambda t}.$$

- д) Пусть λ – корень кратности 3 ($k = 3$). Если $\text{rang}(A - \lambda E) = 1$, $n - r = 2$. В этом случае матрица A имеет два линейно независимых собственных вектора h_1 и h_2 относящихся к собственному значению λ и, следовательно, $Y_1 = e^{\lambda t} h_1$ и $Y_2 = e^{\lambda t} h_2$ – решения системы. Необходимо найти еще одно решение. Третье решение системы дифференциальных уравнений будем искать в виде

$$Y_3 = e^{\lambda t} (h_3 + \tilde{h} t),$$

где h_3 – решение уравнения $(A - \lambda E) \cdot h_3 = \tilde{h}$, а $\tilde{h} = \alpha h_1 + \beta h_2$. α и β – числа, одновременно не равные нулю, которые следует выбрать так, чтобы система $(A - \lambda E) \cdot h_3 = \tilde{h}$ была совместна.

Таким образом, если для системы третьего порядка ($n = 3$) $k = 3$, $n - r = 2$, то рассматриваемая система имеет решения

$$Y_1 = e^{\lambda t} h_1, Y_2 = e^{\lambda t} h_2, Y_3 = e^{\lambda t} (h_3 + \tilde{h}t),$$

где h_1 и h_2 - линейно – независимые векторы, относящиеся к собственному значению λ ;

$\tilde{h} = \alpha h_1 + \beta h_2$, α и β - числа, одновременно не равные нулю, которые выбираются так, чтобы система $(A - \lambda E) \cdot h_3 = \tilde{h}$ была совместна;

h_3 - любое решение системы $(A - \lambda E) \cdot h_3 = \tilde{h}$.

е) Пусть λ - корень кратности 3 ($k = 3$). Если $\text{rang}(A - \lambda E) = 2$, $n - r = 1$. В этом случае матрица A имеет один линейно независимый собственный вектор h_1 и, следовательно, $Y_1 = e^{\lambda t} h_1$ - решение системы. Необходимо найти еще 2 решения. Второе решение системы будем искать в виде

$$Y_2 = e^{\lambda t} (h_2 + h_1 t),$$

где h_2 - вектор, являющийся решением уравнения $(A - \lambda E) \cdot h_2 = h_1$. (h_2 – присоединенный вектор).

Третье решение будем искать в виде

$$Y_3 = e^{\lambda t} \left(h_3 + h_2 t + h_1 \frac{t^2}{2} \right),$$

где h_3 - решение системы $(A - \lambda E) \cdot h_3 = h_2$.

Векторы h_1, h_2, h_3 - линейно независимы и образуют жорданову цепочку векторов. Вектор - функции Y_1, Y_2, Y_3 образуют ФСР. Общее решение системы будет иметь вид

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + C_3 Y_3 = e^{\lambda t} \left(C_1 h_1 + C_2 (h_2 + h_1 t) + C_3 \left(h_3 + h_2 t + h_1 \frac{t^2}{2} \right) \right).$$

Итак, мы рассмотрели метод Эйлера в трех случаях:

- 1) Характеристические корни матрицы A действительны и различны;
- 2) Характеристические корни матрицы A различны, но среди них есть комплексные;
- 3) Характеристические корни матрицы A действительны, но среди них есть кратные.

Не рассмотренным остался случай, когда среди характеристических корней матрицы A есть кратные комплексные корни. В этой ситуации для метода Эйлера возникают алгебраические трудности, поэтому лучше использовать другие методы.