ЗАОЧНАЯ ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНАЯ ШКОЛА
ПРИ СИБИРСКОМ ФЕДЕРАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

МАТЕМАТИКА
АДАПТАЦИОННЫЙ КУРС

Учебное пособие

Допущено УМО по классическому университетскому образованию в качестве учебного пособия по дисциплине вузовского компонента "Математика. Адаптационный курс" для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности ВПО 010101 "Математика", направлениям 010100 "Математика", 010300 "Математика. Компьютерные науки"

Красноярск
ИПК СФУ
2009

УДК 51(075)
ББК 22.1я73
К97

Рецензенты:
профессор Сибирского государственного аэрокосмического университета С.И. Сенашов;
кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений Института математики Сибирского федерального университета

К97 **Математика. Адаптационный курс** : учеб. пособие / ЗЕНШ при СФУ; сост. : А.М. Кытманов, Е.К. Лейнартас, С.Г. Мысливец. — Красноярск ИПК СФУ, 2009. — 196 с.
ISBN 978-5-7638-1552-8

Учебное пособие предназначено для проведения занятий по элементарной математике для студентов первого курса специальностей и направлений, обучение на которых предполагает высокий базовый уровень математической подготовки. Оно также может быть полезно выпускникам школ при подготовке к сдаче единого государственного экзамена.

УДК 51(075)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-7638-1552-8

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие предназначено для проведения занятий по элементарной математике для студентов первого курса специальностей и направлений с большим объемом дисциплин математического цикла. Цель этих занятий состоит в том, чтобы по возможности быстро довести математическую подготовку первокурсников до уровня, необходимого для успешного освоения таких разделов высшей математики, как математический анализ, линейная алгебра, аналитическая геометрия и др. Пособие также может быть полезно выпускникам школ и абитуриентам как при самостоятельной подготовке к сдаче единого государственного экзамена, так и для занятий в группе на подготовительных курсах.

Теоретический материал, практические занятия систематизированы по темам и уровню сложности, приведены примеры с решением задач. Таким образом пособие ориентировано на широкий круг учащихся с различным уровнем математической подготовки и различными целями изучения математики.

В пособии мы придерживаемся обычных обозначений теории множеств: пустое множество — $\varnothing$, знаки теоретико-множественных операций — $\cap$, $\cup$, $\subset$, $\supset$, $\in$. Обозначения числовых множеств: $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, $\mathbb{R}$ — множество действительных (вещественных) чисел. Обозначения числовых промежутков (a, b), — открытый промежуток или интервал, $[a, b]$ — замкнутый промежуток или отрезок, $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ — числовые промежутки разного типа.

Учебный план курса

I. Преобразование арифметических и алгебраических выражений

Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное. Модуль (абсолютная величина) действительного числа и его геометрический смысл. Проценты, пропорции. Числовые и буквенные выражения. Равенство и тождество. Формулы сокращенного умножения. Свойства степеней и действия с арифметическими корнями. Степень с рациональным показателем. Арифметический корень. Тождество $\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x|$. Действия над арифметическими корнями. Выделение полного квадрата в подкоренных выражениях. Освобождение от иррациональности в знаменателе. Упрощение иррациональных алгебраических выражений и выражений, содержащих неизвестное под знаком модуля.

II. Прогрессии и текстовые задачи

Понятие о числовой последовательности и способах ее задания. Арифметическая прогрессия, определение и свойства. Формула n–го члена и суммы первых n членов прогрессии. Геометрическая прогрессия, определение, свойства. Формула n–го члена и суммы первых n членов прогрессии. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, ее сумма. Схема решения текстовых задач. Задачи, связанные с понятием "концентрация"и "процентное содержание". Задачи на движение, работу и производительность труда. Задачи на процентный прирост и вычисление сложных процентов.

III. Рациональные уравнения

Равенство, тождество, уравнение. Корень уравнения. Равносильные уравнения и неравносильные преобразования при решении уравнений. Расширение и сужение области допустимых значений уравнения. Линейные уравнения. Уравнения с параметром. Квадратные уравнения. Дискриминант. Формула для решения квадратных уравнений. Теоремы Виета, прямая и обратная. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители. Биквадратные уравнения. Рациональные уравнения. Многочлен с одной переменной. Корень многочлена, теорема Безу, разложение многочлена на множители.

IV. Алгебраические уравнения и системы уравнений

Иррациональные уравнения, область допустимых значений. Уравнения с параметром и уравнения с модулем. Системы уравнений. Совместные и несовместные системы уравнений. Определенные и неопределенные системы уравнений. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Графический способ решения. Линейные системы с параметром. Различные системы уравнений (рациональные и иррациональные). Системы уравнений с параметром.

V. Рациональные неравенства

Числовые неравенства, их свойства. Неравенства с одной переменной, равносильные преобразования неравенств. Решение квадратных неравенств, рациональных неравенств. Метод интервалов. Системы рациональных неравенств. Равносильные преобразования систем. Совокупность систем неравенств. Неравенства с параметром.

VI. Алгебраические неравенства

Иррациональные неравенства и их системы. Область допустимых значений. Неравенства, содержащие знак модуля, и их системы. Схемы решения. Равносильные преобразования неравенств и систем неравенств, неравенства с параметром.

VII. Преобразование тригонометрических выражений

Понятие угла и дуги, их градусная и радианная меры. Определение тригонометрических функций числового аргумента: синуса, косинуса, тангенса и котангенса. Промежутки сохранения знака для тригонометрических функций. Вычисление значений тригонометрических выражений без таблиц. Зависимость между тригонометрическими функциями одного аргумента. Основное тригонометрическое тождество. Четность, нечетность. Периодичность.

Формулы сложения. Формулы приведения. Тригонометрические функции двойного и половинного аргумента. Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение и обратно.

Определение обратных тригонометрических функций: арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса. Нахождение тригонометрических функций от обратных тригонометрических функций.

VIII. Тригонометрические уравнения и неравенства

Решение простейших тригонометрических уравнений: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$. Основные типы тригонометрических уравнений и методы их решения: метод дополнительного угла; замена переменной в уравнениях вида $R(\cos x + \sin x, \cos x \cdot \sin x) = 0$; понижение степени уравнения переходом к кратным углам; однородные тригонометрические уравнения; выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции. Тригонометрические неравенства.

IX. Преобразование логарифмических и показательных выражений

Логарифмы, десятичные и натуральные логарифмы. Логарифмы произведения, частного, степени и корня. Основное логарифмическое тождество. Переход к новому основанию. Потенцирование. Преобразование показательных выражений. Преобразование смешанных выражений.

X. Логарифмические и показательные уравнения

Показательные уравнения, логарифмические уравнения. Простейшее уравнение. Приемы сведения уравнения к простейшему. Смешанные уравнения и уравнения с параметром.

XI. Логарифмические и показательные неравенства и системы уравнений

Показательные неравенства. Логарифмические неравенства. Смешанные неравенства. Логарифмические и показательные системы уравнений. Неравенства с параметром. Системы уравнений с параметром.

XII. Функции и их графики

Понятие числовой функции, способы задания, область определения, область значений функции. График функции. Общие свойства функции: промежутки знакопостоянства, монотонность, ограниченность, четность, нечетность, периодичность. Понятие обратной функции. Графики прямой и обратной функции.

Элементарные функции.

Преобразования графиков функций: сдвиг вдоль осей координат, растяжение и сжатие вдоль осей координат, преобразования, связанные с наличием знака модуля у аргумента или функции.

XIII. Исследование функций

Уравнение касательной к графику функции.

Правила вычисления производных: производные суммы, разности, произведения и частного двух функций. Таблица производных. Производная сложной функции. Максимумы и минимумы (экстремумы) функции, промежутки возрастания и убывания. Общая схема построения графиков функций. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке. Применение производной для решения задач.

XIV. Планиметрия. Основные понятия

Смежные и вертикальные углы, их свойства. Перпендикуляр и наклонная. Свойство серединного перпендикуляра к отрезку. Признаки параллельности прямых. Теорема Фалеса. Свойство средней линии треугольника. Треугольники. Признаки равенства треугольников. Правильный треугольник. Равнобедренный треугольник и его свойства. Медиана, биссектриса, высота треугольника. Сумма величин внутренних углов треугольника и выпуклого многоугольника. Теорема о внешнем угле треугольника. Свойства углов с соответственно параллельными и перпендикулярными сторонами. Теоремы синусов и косинусов. Решение треугольников. Прямоугольный треугольник и метрические соотношения в нем. Катет и гипотенуза. Теорема Пифагора. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Окружность, круг.

XV. Планиметрия. Различные геометрические фигуры на плоскости

Параллелограмм, свойства и признаки параллелограмма. Прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция. Средняя линия трапеции. Свойство диагоналей в ромбе. Вписанные и описанные многоугольники. Свойство четырехугольника, вписанного в окружность. Свойство четырехугольника, описанного вокруг окружности. Окружность, вписанная в треугольник, ее центр и радиус. Площадь треугольника, параллелограмма, ромба, прямоугольника, трапеции. Длина окружности, число π. Площадь круга, площадь сектора.

XVI. Векторы на плоскости и в пространстве

Векторы на плоскости и в пространстве, линейные операции над векторами: сложение, вычитание, умножение на число. Метод координат на плоскости и в пространстве. Расстояние между точками на плоскости и в пространстве. Линейные операции над векторами в координатной форме. Длина вектора. Скалярное произведение векторов, его свойства. Угол между векторами. Условия перпендикулярности и коллинеарности векторов.

XVII. Стереометрия

Прямые и плоскости в пространстве. Взаимное расположение двух прямых, двух плоскостей, прямой и плоскости в пространстве. Угол и расстояние между скрещивающимися прямыми. Признаки параллельности прямой и плоскости, двух плоскостей. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Теорема о трех перпендикулярах. Угол между прямой и плоскостью. Признак перпендикулярности двух плоскостей. Многогранники. Призма, виды призм: прямая и правильная призмы, параллелепипед, прямоугольный параллелепипед. Пирамида. Площадь поверхности и объем призмы, параллелепипеда и пирамиды. Тела вращения (цилиндр, конус и шар). Площадь поверхности и объем цилиндра, конуса, усеченного конуса. Сфера, шаровой сектор, шаровой сегмент. Площадь поверхности сферы, объем шара.

1. Преобразование арифметических и алгебраических выражений

Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное. Модуль (абсолютная величина) действительного числа и его геометрический смысл. Проценты, пропорции. Числовые и буквенные выражения. Равенство и тождество. Формулы сокращенного умножения. Свойства степеней и действия с арифметическими корнями. Степень с рациональным показателем. Арифметический корень. Тождество $\sqrt[2n]{x^{2n}}=|x|$. *Действия над арифметическими корнями. Выделение полного квадрата в подкоренных выражениях. Освобождение от иррациональности в знаменателе. Упрощение иррациональных алгебраических выражений и выражений, содержащих неизвестное под знаком модуля.*

1.1. Справочный материал

При решении задач на выполнение арифметических действий прежде всего следует обратить внимание на форму представления чисел и порядок действий. В процессе вычислений нужно сначала максимально упростить арифметическое выражение, выбрав подходящее представление чисел, освободиться от степеней с отрицательными показателями и т. п.

Разложение натурального числа на простые множители

Для *разложения* натурального числа *на простые множители* применяем следующий прием:
а) подбираем наименьшее простое число, на которое делится данное число;
б) представляем данное число как произведение найденного простого множителя и некоторого натурального числа;
в) повторяем пункты а) и б) для нового натурального числа до тех пор, пока оно не станет равным единице.

Наибольший общий делитель

Для отыскания *наибольшего общего делителя* (НОД) двух натуральных чисел необходимо выполнить следующие операции:
а) разложить каждое из данных чисел на простые множители;
б) найти произведение простых множителей, входящих в каждое из данных чисел.

Если какой-то простой множитель входит в эти разложения в разных степенях, то в наибольший общий делитель он входит в наименьшей из этих степеней. Если нет ни одного простого множителя, входящего в оба рассматриваемых числа, то наибольший общий делитель равен единице. В этом случае говорят, что числа *взаимно просты*.

Можно рекомендовать также следующий способ нахождения НОД двух натуральных чисел a и b (*алгоритм Евклида*). Пусть $b \leqslant a$. Сначала делим большее число a на меньшее число b. Остаток от деления обозначим r_1. Затем делим b на r_1. Остаток от деления обозначим через r_2. Потом r_1 делим на r_2. И так далее. Получаем остатки $r_3, \ldots, r_k, \ldots$. Если на некотором шаге получаем, что $r_k = 0$ (т. е. деление произошло нацело), то предыдущий остаток r_{k-1} и есть НОД. Если же на некотором шаге $r_k = 1$, то числа взаимно просты и их НОД$=1$.

Наименьшее общее кратное

Для нахождения *наименьшего общего кратного* (НОК) двух натуральных чисел необходимо выполнить такие операции:
а) разложить каждое из данных чисел на простые множители;
б) найти произведение простых множителей, входящих в разложение хотя бы одного из чисел.

Если какой-то простой множитель входит в эти разложения в разных степенях, то в наименьшее общее кратное он входит в наибольшей из этих степеней.

Полезно помнить формулу о связи НОД и НОК. Если a и b — натуральные числа, то НОД$(a, b)\cdot$НОК$(a, b) = a \cdot b$.

Модуль (абсолютная величина) числа

По определению для всякого вещественного числа a

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a > 0, \\ 0, & \text{если } a = 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Свойства модуля
1. $|a| \geqslant 0$ и $|a| = 0$ в том и только в том случае, когда $a = 0$;
2. $|ab| = |a| \cdot |b|$;
3. $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ (неравенство треугольника).

Формулы сокращенного умножения

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
3. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
4. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
5. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
6. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.
7. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Свойства степеней и действия с корнями

Для вещественных a, x, y и натуральных n и k

1. $a^0=1$.
2. $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$.
3. $a^x a^y=a^{x+y}$.
4. $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$.
5. $(a^x)^y=a^{xy}$.
6. $(ab)^x=a^x b^x$.
7. $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$.
8. $a^{\frac{k}{n}}=\sqrt[n]{a^k}$.
9. $\sqrt{a^2}=|a|$.
10. $\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|$.
11. $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}}=a$.
12. $\sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a}$.
13. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$.
14. $\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}$.
15. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}$.
16. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.
17. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$.

Отношения, пропорции и их свойства

Отношением числа x к числу y называется частное чисел x и y, т. е. $\dfrac{x}{y}$ (или $x:y$).

В отношении $\dfrac{x}{y}$ число x называется *предыдущим* членом, y – *последующим.*

Пропорцией называется равенство двух отношений, т. е. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{x}{y}$; a и y называются крайними членами, x и b – средними членами пропорции.

Свойства пропорции:

1. Произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов, т. е. если $\dfrac{a}{b}=\dfrac{x}{y}$, то $ay=bx$.

2. Обратно: числа $a,\ b,\ x,\ y$ составляют пропорцию $\dfrac{a}{b}=\dfrac{x}{y}$, если $ay=bx$.

3. Из пропорции $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ вытекают следующие пропорции: $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$, $\dfrac{d}{b}=\dfrac{c}{a}$, $\dfrac{d}{c}=\dfrac{b}{a}$, т. е. в пропорции можно менять местами крайние и средние члены или те и другие одновременно.

4. Чтобы найти неизвестный средний (крайний) член пропорции, надо произведение крайних (средних) членов разделить на известный средний (крайний) член пропорции: $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{c}\Rightarrow x=\dfrac{ac}{b}$, $\dfrac{x}{a}=\dfrac{d}{c}\Rightarrow x=\dfrac{ad}{c}$.

Среднее арифметическое и среднее геометрическое

Средним арифметическим двух чисел a и b называется их полусумма $\dfrac{a+b}{2}$. *Средним арифметическим* чисел $a_1,\ldots,a_n$ называется выражение $\dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n}$.

Средним геометрическим двух неотрицательных чисел называется число $\sqrt{ab}$. *Средним геометрическим* n неотрицательных чисел $a_1,\ldots,a_n$ называется число $\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$.

Классическое неравенство

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$$

справедливо для неотрицательных чисел a и b.

Проценты

Процентом называется сотая часть какого-либо числа. Процент обозначается знаком %. Например, 5 %, 100 %.

Если данное число принять за 1, то 1 % составляет 0,01 этого числа, 25 % составляют 0,25 числа (или $\frac{1}{4}$ числа) и т. д.

Чтобы число процентов выразить в виде дроби, достаточно число процентов разделить на 100. Например, $125\ \% = 1,25$; $2,3\ \% = 0,023$.

Чтобы найти a % от числа b, надо b умножить на $\frac{a}{100}$. Например, 30 % от 60 составляют $\frac{60\cdot 30}{100} = 18$.

Если известно, что a % числа x равно b, то число x можно найти по формуле $x = \frac{b}{a}\cdot 100$.

Чтобы найти процентное отношение двух чисел a и b, надо отношение этих чисел умножить на 100 %, т. е. вычислить $\left(\frac{a}{b}\right)\cdot 100\ \%$.

Упрощение алгебраических выражений

Алгебраическое выражение — это выражение, содержащее некоторые числа и некоторые переменные, над которыми производятся алгебраические операции: сложение, умножение, вычитание, деление, возведение в степень, извлечение корня и взятие модуля (абсолютной величины).

Под *упрощением* алгебраического выражения понимается приведение его к виду, содержащему меньшее число алгебраических операций.

Если в алгебраическом выражении присутствуют только арифметические операции: сложение, умножение, вычитание и деление, а также возведение в целую степень, то оно называется *рациональным.*

Алгебраическое выражение, содержащее знаки корня или возведение в нецелую степень, но не содержащее модулей, называется *иррациональным.*

При преобразовании иррациональных выражений необходимо учитывать, что по определению корень четной степени есть величина неотрицательная, в то время как корень нечетной степени может быть как положительной, так и отрицательной величиной (см. свойства степеней).

Преобразование алгебраических выражений, содержащих знак модуля некоторой функции, обычно производится отдельно на каждом промежутке знакопостоянства этой функции.

1.2. Примеры

Пример 1. Найти частное от деления наименьшего общего кратного чисел 12 600 и 8820 на их наибольший общий делитель.

Решение. Разложим эти числа на простые множители

$$12\ 600=2\cdot 6300=2^2\cdot 3150=2^3\cdot 1575=2^3\cdot 3\cdot 525=$$
$$=2^3\cdot 3^2\cdot 175=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 35=2^3\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7$$
$$8820=2\cdot 4410=2^2\cdot 2205=2^2\cdot 3\cdot 735=2^2\cdot 3^2\cdot 245=$$
$$=2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 49=2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7^2.$$

НОК$(12\ 600,\ 8820)=2^3\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2=88\ 200$.

НОД$(12\ 600,\ 8820)=2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=1260$.

Делим $\dfrac{2^3\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}{2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}=70$.

Другой способ нахождения НОД заключается в следующем: делим 12 600 на 8820, получаем в остатке 3780. Делим 8820 на 3780, получаем в остатке 1260. А число 3780 делится на 1260 без остатка, поэтому НОД$=1260$.

НОК равен произведению этих чисел, деленному на НОД, т. е. НОК$=12\ 600\cdot 8820:1260=88\ 200$.

Ответ: 70.

Пример 2. Упростить $\dfrac{2,9}{\sqrt{3}-\sqrt{0,1}}-\sqrt{3}-\sqrt{0,1}$.

Решение. $\dfrac{2,9}{(\sqrt{3}-\sqrt{0,1})}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{0,1}}{\sqrt{3}+\sqrt{0,1}}-\sqrt{3}-\sqrt{0,1}=$
$=\dfrac{2,9(\sqrt{3}+\sqrt{0,1})}{2,9}-\sqrt{3}-\sqrt{0,1}=0$.

Ответ: 0.

Пример 3. Упростить $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

Решение. Выделим в подкоренном выражении полный квадрат:

$$4-2\sqrt{3}=1-2\sqrt{3}+3=1-2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=(1-\sqrt{3})^2.$$

Поэтому $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}=|1-\sqrt{3}|=\sqrt{3}-1$.

Ответ: $\sqrt{3}-1$.

Пример 4. Упростить $\dfrac{9x^2+15x+6}{9x^2+9x+2}$.

Решение. Разложим квадратные трехчлены на множители. Для этого найдем их корни. Корни числителя равны -1 и $-2/3$, а корни знаменателя равны $-1/3$ и $-2/3$. Поэтому $9x^2+15x+6=(3x+3)(3x+2)$ и $9x^2+9x+2=(3x+1)(3x+2)$.

Ответ: $\dfrac{3x+3}{3x+1}$.

Пример 5. Упростить $\dfrac{(2m)^{3/2}+(5n)^{3/2}}{2m-\sqrt{10mn}+5n}$.

Решение. Разложим числитель на множители по формуле сокращенного умножения $[(2m)^{\frac{1}{2}}+(5n)^{\frac{1}{2}}](2m-\sqrt{10mn}+5n)$.

Ответ: $\sqrt{2m}+\sqrt{5n}$.

Пример 6. Разделить число 3600 пропорционально числам 5, 7, 9 и 4.

Решение. $5+7+9+4=25$, $3600:25=144$, $5\cdot144=720$, $7\cdot144=1008$, $9\cdot144=1296$ и $4\cdot144=576$.

Ответ: 720, 1008, 1296 и 576.

Пример 7. Найдите x из пропорции

$$\frac{1,2:0,375-0,2}{6\frac{4}{25}:15\frac{2}{5}+0,8}=\frac{0,016:0,12+0,7}{x}$$

$$x=\frac{(6\frac{4}{25}:15\frac{2}{5}+0,8)\cdot(0,016:0,12+0,7)}{1,2:0,375-0,2}$$

Ответ: $\dfrac{1}{3}$.

Пример 8. Число 8 составляет 30 % числа b. Сколько процентов числа $b+8$ составляет число b?

Решение. Известно, что $\dfrac{8}{b}\cdot100=30$, отсюда $b=\dfrac{80}{3}$. Тогда $\dfrac{b}{b+8}\times$ $\times100=\dfrac{\frac{80}{3}}{\frac{80}{3}+8}\cdot100=\dfrac{1000}{13}$.

Ответ: $\dfrac{1000}{13}$ %.

Пример 9. Какой цифрой оканчивается число 7^{25}?

Решение. Последние цифры чисел 7^1, 7^2, 7^3, 7^4 соответственно 7, 9, 3, 1, поэтому последняя цифра числа $(7^4)^6$ есть 1. Так как $7^{25}=(7^4)^6\cdot7$, то последняя цифра этого числа – 7.

Ответ: 7.

Пример 10. Какое из чисел больше, $\sqrt[3]{30}$ или $\sqrt{10}$?

Решение. Пусть $\sqrt[3]{30}=A$, $\sqrt{10}=B$, тогда $A^6=30^2=900$, $B^6=10^3=1000$. Так как $A^6<B^6$, то $A<B$.

Ответ: $\sqrt[3]{30}<\sqrt{10}$.

1.3. Аудиторные задачи

Выполнить арифметические действия:

1. $\dfrac{3^{-1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{2-\left(\frac{3}{4}\right)^{2}}\cdot\left(5^0-\frac{1}{6}\right)^{-1}+2\cdot10^{-1}$.

2. $\left(\dfrac{3\frac{1}{3}+2,5}{2,5-1\frac{1}{3}}\cdot\dfrac{4,6-2\frac{1}{3}}{4,6+2\frac{1}{3}}\right)\cdot5,2:\left(\dfrac{0,05}{\frac{1}{7}-0,125}+5,7\right)$.

3. $(4\sqrt{27}-\sqrt[3]{32})-(\sqrt[3]{108}+3\sqrt{48})$.

4. $\sqrt[4]{2^{-5}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}}+\sqrt[4]{\dfrac{1}{64}\sqrt[3]{2}}-3\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{2^{-1}}}{2}}$.

5. $(3\sqrt[3]{9\sqrt{162}}+11\sqrt[6]{18})\cdot 2^{-1}\cdot(-75\sqrt{50})^{-1/3}$.

6. Найти частное от деления наименьшего общего кратного чисел 600 и 1260 на их наибольший общий делитель.

7. Найти разность между наименьшим общим кратным чисел 270 и 144 и их наибольшим общим делителем.

8. Найти среднее арифметическое чисел $\dfrac{14^{48}}{98^{24}}$ и $\dfrac{14^{47}}{98^{23}}$.

9. Найти среднее арифметическое чисел $\dfrac{16^{38}}{64^{19}}$ и $\dfrac{16^{37}}{64^{18}}$.

10. Разделить число 798 пропорционально числам $\dfrac{2}{3}$; $0,75$; $0,8$.

11. Числители трех дробей пропорциональны числам 1, 2, 3, а знаменатели пропорциональны соответственно числам 1, 5, 4. Найти эти дроби, если известно, что их среднее арифметическое равно $\dfrac{43}{80}$.

12. Сумма первых трех членов пропорции равна 43. Найти четвертый член пропорции, если второй ее член составляет 1/4, а третий — 2/7 первого члена.

13. Найти число, $3\frac{2}{3}$ % которого составляют $\dfrac{\left(85\frac{7}{30}-83\frac{5}{18}\right):2\frac{2}{3}}{0,04}$.

14. Найти количество двузначных чисел, каждое из которых при делении на цифру единиц его десятичной записи дает в частном 13 и в остатке 6.

15. Число увеличили на 25 %. На сколько процентов нужно уменьшить новый результат, чтобы получить исходное число?

16. Некоторое число увеличили вначале на 20 %, затем результат увеличили еще на 30 %, получили 78. Найти первоначальное число.

17. Найти сумму остатков, получающихся при делении натурального числа 2 736 455 478 346 791 на 2, 3, 4, 5, 9, 10, 25.

18. Найти сумму остатков, получающихся при делении натурального числа 12 645 074 736 на 2, 3, 4, 5, 9, 10, 25.

19. Какие из нижеприведенных выражений являются иррациональными числами:

$(1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2$; $(1-\sqrt{3})^2$; $(\sqrt{3}-2)(2+\sqrt{3})$; $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+2\sqrt{6}$; $\dfrac{1,8}{\sqrt{2}-\sqrt{0,2}}-\sqrt{2}-\sqrt{0,2}$?

20. Найти $\sqrt{21-t}+\sqrt{7-t}$, если $\sqrt{21-t}-\sqrt{7-t}=2$.

21. Найти значение выражения $\dfrac{a^3-b^3}{(a-b)^3}$, если $a=\dfrac{1}{\sqrt{8}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и $b=\dfrac{1}{\sqrt{8}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Упростить выражения:

22. $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

23. $\dfrac{y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{2}}-z}{y^{\frac{2}{3}}-z}+\dfrac{y}{y+y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{1}{2}}}$.

24. $\dfrac{\sqrt[3]{25}b^{\frac{2}{3}}-4}{\sqrt[3]{5}b^{\frac{1}{3}}+2}-\sqrt[3]{5}b^{\frac{1}{3}}$.

25. $\dfrac{\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}+\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}}{\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}-\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}}$.

26. $\dfrac{27-27a+9a^2-a^3}{a^2-6a+9}$.

27. $\sqrt[3]{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{17+4\sqrt{15}}$.

Упростить выражения и вычислить их значения при заданном значении параметров:

28. $\dfrac{m^{-2}n^{-1}-m^{-1}n^{-2}}{m^{-2}-n^{-2}}-\dfrac{1}{m}(mn^{-1}+2+m^{-1}n)^{-1}$ при $m=0,003$; $n=0,007$.

29. $\left(\sqrt{\dfrac{abc+4}{a}+4\sqrt{\dfrac{bc}{a}}}\right):(\sqrt{abc}+2)$ при $a=0,04$.

30. $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{(a^2-ab)^{\frac{2}{3}}}:\dfrac{a^{-\frac{2}{3}}\sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}$ при $a=1,2$; $b=0,6$.

31. $\dfrac{\sqrt{x}}{1-x\sqrt{x}}:\dfrac{\sqrt{x}+x}{x+\sqrt{x}+1}$ при $x=0,5$.

32. $(a+x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}-(a-x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$ при $x=4a-4$, $1<a<2$.

Упростить выражения:

33. $\sqrt[4]{x(7+4\sqrt{3})}\cdot\sqrt{2\sqrt{x}-\sqrt{3x}}$.

34. $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}-\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$.

35. $\dfrac{\dfrac{|x-1|}{x}+x|x-1|+2-\dfrac{2}{x}}{\sqrt{x-2+\dfrac{1}{x}}}$.

36. Найти последнюю цифру числа 7^{1998}.

Вычислить:

37. $\dfrac{\sqrt{56-24\sqrt{5}}}{12-4\sqrt{5}}$.

38. $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$.

1.4. Домашнее задание

1. Числители трех дробей пропорциональны числам 1, 2, 5, а знаменатели пропорционально соответственно числам 1, 3, 7. Найти наименьшую из дробей, если известно, что их среднее арифметическое равно $\dfrac{200}{441}$.

2. Некоторое число уменьшили на 12 % и в результате получили 85. Найти величину этого числа (с округлением до 0,01).

3. Вычислить

$$\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}}.$$

4. Найти разность между наибольшим общим делителем чисел 720 и 924 и наименьшим общим кратным чисел 98 и 100.
5. Вычислить сумму остатков от деления числа 543 672 185 432 436 на 2, 3, 4, 5, 9, 10, 25.
6. Найти количество двузначных чисел, каждое из которых при делении на цифру единиц его десятичной записи дает в частном 7 и в остатке 6.
7. Вычислить

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}+(810\ 000)^{0,25}-\left(7\frac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}}+(0,63)^{0}.$$

8. Вычислить

$$\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}-\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}.$$

9. Вычислить значение выражения $\dfrac{a^3-b^3}{(a-b)^3}$, если $a=\dfrac{1}{\sqrt{7}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и $b=\dfrac{1}{\sqrt{7}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
10. Упростить

$$\frac{1-b^{-1}+b^{-2}}{1-b+b^2}.$$

11. Сколько процентов числа 4 составляет разность между ним и 3 % числа 20?
12. Упростить

$$\frac{4\sqrt[4]{x}+x\sqrt{2}}{2\sqrt[4]{x}+\sqrt{2x}}+\sqrt{4+x-4\sqrt{x}},\quad 0<x\leqslant 4.$$

13. Сократить дробь

$$\frac{2a^2-3ab+b^2}{b^2-4a^2}.$$

14. Упростить

$$\frac{q^{-0,3}-n^{-1,4}}{q^{-0,15}-n^{-0,7}}.$$

15. Вычислить

$$\frac{\sqrt{31+10\sqrt{6}}}{20+4\sqrt{6}}.$$

16. Найти

$$\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}.$$

17. Найти $\sqrt{6-t}+\sqrt{5-t}$, если $\sqrt{6-t}-\sqrt{5-t}=4$.
18. Какому числу равно выражение

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+6a+9}-\sqrt{a^2-6a+9}}$$

при $a\in(0,3)$?
19. Упростить

$$\frac{\sqrt{4x+4+x^{-1}}}{\sqrt{x}|2x^2-x-1|}.$$

20. Найти последнюю цифру числа 3^{1998}.

1.5. Проверочный тест

1. Некоторое число увеличили на 11 %, получив в результате 92. Величина исходного числа, округленная до 0,01, равна

1) $81,88$; 2) $82,88$; 3) $81,96$; 4) $82,98$; 5) $86,48$.

2. Частное от деления наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя чисел 125 и 150 равно

1) 50; 2) 75; 3) 30; 4) 18; 5) 25.

3. Выражение

$$(x^2 - x^{0,5}) : \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x} + x}{1 + \sqrt{x}}$$

после упрощения равно

1) $x+1$; 2) $\sqrt{x}-1$; 3) $\sqrt{x}$; 4) $x-1$; 5) $\sqrt{x}+1$.

4. После сокращения дробь

$$\frac{2a^2 - 3ab + b^2}{3a^2 - 2ab - b^2}$$

имеет вид

1) $\dfrac{2a-b}{3a+b}$; 2) $\dfrac{b-2a}{3a+b}$; 3) $\dfrac{2a+b}{3a-b}$; 4) $\dfrac{2a+b}{3a+b}$; 5) $\dfrac{2a-b}{3a-b}$.

5. Значение выражения

$$(4\sqrt{27} - \sqrt[3]{32}) - (\sqrt[3]{108} + 3\sqrt{48})$$

после упрощения равно

1) $\sqrt{3} - \sqrt[3]{4}$; 2) $-5\sqrt[3]{4}$; 3) $5\sqrt[3]{4}$; 4) $\sqrt{3} - 5\sqrt[3]{4}$; 5) $\sqrt[3]{4}$.

6. Среднее арифметическое чисел $\dfrac{21^{40}}{63^{20}}$ и $\dfrac{21^{39}}{63^{19}}$ равно

1) $2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{20}$; 2) $\dfrac{1}{2}\cdot 3^{20}$; 3) $2\cdot 7^{20}$; 4) $\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{7}\right)^{20}$; 5) $\dfrac{1}{3^{20}}$.

7. Числители трех дробей пропорциональны числам 1, 2, 5, а знаменатели пропорциональны соответственно числам 1, 3, 7. Тогда, если среднее арифметическое этих дробей равно $\dfrac{200}{441}$, то наименьшая из дробей есть

1) $\dfrac{20}{147}$; 2) $\dfrac{4}{7}$; 3) $\dfrac{8}{21}$; 4) $\dfrac{20}{49}$; 5) $\dfrac{8}{63}$.

8. Найти значение выражения $\dfrac{64^{0,5}\sqrt[3]{0,25}}{\sqrt[3]{16}}$.

9. Упростить выражение

$$\frac{36x - y^2}{12\sqrt{x} + 2y} + \frac{y}{2}.$$

10. Найти число, $3\dfrac{3}{5}$ % которого составляет

$$\frac{3 + 4,2 : 0,1}{(1 : 0,3 - 2\frac{1}{3})} : 0,3125.$$

1.6. Ответы

Аудиторные задачи:

1. $-\dfrac{7}{5}$; **2.** 1; **3.** $-5\sqrt[3]{4}$; **4.** $-\sqrt[12]{128}$; **5.** -2; **6.** 210; **7.** 2142; **8.** 2^{26}; **9.** $5\cdot 2^{37}$; **10.** 240, 270, 288; **11.** $\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{3}{10}$, $\dfrac{9}{16}$; **12.** 2; **13.** 500; **14.** 2; **15.** 20; **16.** 50; **17.** 19; **18.** 18; **19.** Только второе; **20.** 7; **21.** $\dfrac{17}{32}$; **22.** $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; **23.** 1; **24.** -2; **25.** $\dfrac{x}{2}$; **26.** $3-a$; **27.** $-\sqrt[3]{7}$; **28.** $\dfrac{m}{(m+n)^2}$, 30; **29.** $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$, 5; **30.** a^2+ab+b^2; 2,52 ; **31.** $\dfrac{1}{1-x}$, 2; **32.** $-\dfrac{2\sqrt{a-1}}{2-a}$; **33.** $\sqrt{x}$; **34.** $2\sqrt{2}$ при $x\in(4,+\infty)$ и $\sqrt{2}\sqrt{2x-4}$ при $x\in[2,4]$; **35.** $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}}$ при $x\in(0,1)$ и $\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x}}$ при $x\in(1,+\infty)$; **36.** 9; **37.** 0,5; **38.** 4.

Домашнее задание:

1. $\dfrac{8}{21}$; **2.** 96,59; **3.** 3; **4.** -4888; **5.** 18; **6.** 2; **7.** $37\dfrac{1}{2}$; **8.** $2\sqrt{2}$; **9.** $\dfrac{13}{28}$; **10.** $\dfrac{1}{b^2}$; **11.** 85; **12.** $\sqrt{2}(2\sqrt{2}-\sqrt[4]{x})$; **13.** $\dfrac{b-a}{b+2a}$; **14.** $q^{-0,15}+n^{-0,7}$; **15.** 0,25; **16.** 2; **17.** $\dfrac{1}{4}$; **18.** $\dfrac{1}{2}$; **19.** $\dfrac{1}{x-x^2}$ при $x\in(0,1)$ и $\dfrac{1}{x^2-x}$ при $x\in(1,+\infty)$; **20.** 9.

2. Прогрессии и текстовые задачи

Понятие о числовой последовательности и способах ее задания. Арифметическая прогрессия, определение и свойства. Формула n-го члена и суммы первых n членов прогрессии. Геометрическая прогрессия, определение, свойства. Формула n-го члена и суммы первых n членов прогрессии. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, ее сумма. Схема решения текстовых задач. Задачи, связанные с понятием "концентрация"и "процентное содержание". Задачи на движение, работу и производительность труда. Задачи на процентный прирост и вычисление сложных процентов.

2.1. Справочный материал

Арифметическая прогрессия

Числовая последовательность, у которой задан *первый член* a_1, а каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с некоторым числом d, называется *арифметической прогрессией*. Таким образом,

$$a_{n+1}=a_n+d,$$

где a_n и a_{n+1} соответственно n-й и $(n+1)$-й члены прогрессии; d — *разность* арифметической прогрессии.

Эта формула неудобна тем, что для вычисления $n+1$-го члена необходимо знать все предыдущие члены прогрессии. Формула n-го члена в виде

$$a_n=a_1+d(n-1)$$

лишена указанного недостатка.

Сумма первых n членов арифметической прогрессии определяется по следующим формулам:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n \quad \text{или} \quad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n.$$

Признак арифметической прогрессии формулируется так: каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, есть среднее арифметическое соседних с ним членов:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Арифметическая прогрессия полностью определена, если известны a_1 и d.

Геометрическая прогрессия

Числовая последовательность, у которой задан первый член $b_1 \neq 0$, а каждый следующий, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на некоторое отличное от нуля постоянное число q, называется *геометрической прогрессией.* Таким образом,

$$b_{n+1} = b_n q,$$

где b_n и b_{n+1} соответственно n и $(n+1)$-й члены прогрессии; q — *знаменатель* геометрической прогрессии. По определению $q \neq 0$.

Эта формула неудобна тем, что для вычисления n-го члена необходимо знать все предыдущие члены прогрессии. Формула

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

лишена указанного недостатка.

Сумма n первых членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1 - b_n q}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

Признак геометрической прогрессии имеет следующую формулировку: квадрат каждого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению соседних с ним членов:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Геометрическая прогрессия полностью определена, если известны b_1 и q.

Геометрическая прогрессия, у которой $|q| < 1$, называется *бесконечно убывающей*, а сумма всех ее членов определяется по формуле

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Схема решения тестовых задач

Стандартная схема решения текстовых задач состоит из трех этапов.
1. Выбор неизвестных.
2. Составление уравнений (возможно, неравенств).
3. Нахождение неизвестного или нужной комбинации неизвестных.
Рассмотрим схему поэтапно.

Выбор неизвестных

Основные рекомендации здесь просты, хотя и несколько расплывчаты. *Неизвестные должны быть естественными.* При этом не следует пытаться обойтись небольшим числом неизвестных. Наоборот, чем больше неизвестных, тем легче составлять уравнения или неравенства. Вовсе не обязательно, чтобы величина, которую требуется найти, содержалась среди выбранных неизвестных.

Требование "естественности" в простейших случаях означает, что выбор неизвестных диктуется структурой задачи, ее типом. Так, в задачах на движение, как правило, в качестве неизвестных берутся скорости, расстояния, реже — время. В задачах на работу (они аналогичны задачам на движение) за основу берутся производительность (та же скорость, только скорость работы), объем работы. Свои стереотипы имеют задачи на проценты, на концентрацию.

Составление уравнений

В простейших случаях мы приходим к системе уравнений, в которой число уравнений совпадает с числом неизвестных. Если это не так и число уравнений оказалось меньше, а вы точно использовали все условия задачи (они могут быть замаскированы), тогда лучше внимательно прочтите, *что нужно найти.* Попытайтесь выразить то, что нужно найти, через введенные неизвестные.

Нахождение неизвестных

После решения составленного уравнения (или системы уравнений) необходимо провести анализ полученных решений. Выбрать из них те, которые удовлетворяют задаче. Например, масса тела должна быть положительной; количество людей, машин и т. д. должно быть целым.

2.2. Примеры

Пример 1. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму первых 11 членов этой прогрессии.

Решение. $a_3+a_9=8$. Выразим слагаемые через a_1 и d:

$$a_1+2d+a_1+8d=8.$$

Отсюда $2a_1+10d=8$. Подставив это значение в

$$S_{11}=\frac{2a_1+d(11-1)}{2}\cdot 11,$$

получаем, что $S_{11}=4\cdot 11=44$.

Ответ: 44.

Пример 2. Первый и четвертый члены арифметической прогрессии соответственно равны 1,2 и 1,8. Найти сумму первых шести ее членов.

Решение. $a_1=1,2$; $a_4=1,8$. Выразим a_4 через a_1 и d:

$$a_4=a_1+3d.$$

Отсюда $1,8=1,2+3d$, $d=0,2$;

$$S_6=\frac{2a_1+5d}{2}\cdot 6, \quad S_6=(2a_1+5d)\cdot 3,$$

$$S_6=(2\cdot 1,2+5\cdot 0,2)\cdot 3, \quad S_6=10,2.$$

Ответ: 10,2.

Пример 3. Вычислить $7,5+9,8+12,1+\ ...\ +53,5$.

Решение. Так как для данной последовательности чисел выполняется признак арифметической прогрессии $9,8=\dfrac{7,5+12,1}{2}$, то данная последовательность является арифметической прогрессией, у которой $a_1=7,5$; $d=9,8-7,5=2,3$; $a_n=53,5$, $a_n=a_1+d(n-1)$, $53,5=7,5+2,3(n-1)$, $46=2,3(n-1)$, $n=21$.

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n, \quad S_6=\frac{7,5+53,5}{2}\cdot 21.$$

Ответ: 640,5.

Пример 4. Найти сумму всех двузначных положительных чисел.

Решение. Очевидно, что эти числа образуют арифметическую прогрессию, у которой $a_1=10$; $d=1$; $a_n=99$.

Для вычисления суммы прогрессии необходимо найти n:

$$a_n=a_1+d(n-1), \quad 99=10+n-1, \quad n=90.$$

Отсюда

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n, \quad S_{90}=\frac{10+99}{2}\cdot 90=4905.$$

Ответ: 4905.

Пример 5. Вычислить $32-\dfrac{96}{5}+\dfrac{288}{25}-\dfrac{864}{125}+...$.

Решение. Так как для данной последовательности чисел выполняется признак геометрической прогрессии

$$\left(-\frac{96}{5}\right)^2=32\cdot\frac{288}{25},$$

то данная последовательность является бесконечно убывающей геометрической прогрессией, у которой $b_1=32$; $q=-\dfrac{3}{5}$. $S=\dfrac{b_1}{(1-q)}$.

Отсюда $S=20$.

Ответ: 20.

Пример 6. Найти третий член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сумма которой равна 1,6, а второй член равен $-0,5$.

Решение. $S=1,6$; $b_2=-0,5$. Перепишем, используя b_1 и q:

$$\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q}=1,6, \\ b_1q=-0,5. \end{cases}$$

Разделим второе уравнение на первое, получим

$$\begin{cases} q(1-q)=-\dfrac{5}{16}, \\ b_1q=-0,5. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы находим

$$q^2-q-\frac{5}{16}=0, \quad \text{откуда} \quad q_1=\frac{5}{4} \quad \text{(не подходит);} \quad q_2=-\frac{1}{4};$$

тогда $b_1=2$; $b_3=b_1q^2$, $b_3=2(-0,25)^2=0,125$.

Ответ: 0,125.

Пример 7. На производство костюма было израсходовано 2,8 квадратных метра ткани. Площади ткани, израсходованной на пиджак, брюки и жилетку, относятся как $7:5:2$. Сколько ткани пошло на брюки?

Решение. Если обозначить количество ткани, которое пошло на пиджак, брюки и жилетку, через x, y, и z, то можно записать $x=7k$; $y=5k$; $z=2k$, где через k обозначена площадь ткани, приходящейся на одну часть. Общее количество ткани выразится через переменную k так: $7k+5k+2k=2,8$.

Следовательно, $k=0,2$. На брюки израсходован $5\cdot 0,2=1$ квадратный метр ткани.

Ответ: 1 кв. м.

Пример 8. Первый рабочий производит продукции на одну копейку в течение одной секунды. Второй — на один рубль за одну минуту. Во сколько раз производительность второго рабочего больше?

Решение. В данной задаче под производительностью труда удобно понимать стоимость продукции, изготовленной рабочим за единицу времени. Поэтому производительность первого рабочего равна 1 коп./с. Производительность второго рабочего, выраженная в тех же единицах измерения, равна 100 коп./60 с. Поделив одно на другое, получаем ответ $\dfrac{5}{3}$.

Ответ: В $\dfrac{5}{3}$ раза.

Пример 9. Стрекоза и муха двигаются по прямой. Стрекоза догоняет муху. Их скорости равны 1,2 м/с и 30 см/с. Через сколько секунд расстояние между насекомыми сократится с 6,5 м до 20 см?

Решение. Относительная скорость сближения равна разности их скоростей: $v=1,2-0,3=0,9$ м/с. Расстояние, которое надо сократить насекомым, равно разности расстояний в начальный и конечный моменты времени: $S=6,5-0,2=6,3$ м.

Следовательно, интересующее нас время равно
$S/v = 6,3/0,9 = 7$ с.

Ответ: 7 с.

Пример 10. Восемнадцатипроцентный раствор соли массой 2 кг разбавили стаканом воды (0,25 кг). Какой концентрации раствор в процентах в результате был получен?

Решение. Найдем количество соли в 2 кг раствора. Для этого составим пропорцию:

$$2 \text{ кг} - 100\ \%,$$

$$x \text{ кг соли} - 18\ \%.$$

Следовательно, $x = \dfrac{2 \cdot 18}{100} = 0,36$.

После добавления стакана воды получили раствор массой

$$P = 2 + 0,25 = 2,25 \text{ кг}.$$

Процентное содержание соли — это та часть, которую составляют 0,36 кг соли в общем количестве раствора (2,25 кг), умноженная на 100. Следовательно, искомая величина равна $\dfrac{0,36 \cdot 100}{2,25} = 16\ \%$.

Ответ: 16 %.

2.3. Аудиторные задачи

1. В арифметической прогрессии десятый член равен 13, пятый член равен 18. Найти разность прогрессии.

2. Вычислить $432 + 72 + 12 + 2 + \ldots$

3. Знаменатель геометрической прогрессии равен (-2), сумма ее первых пяти членов равна 5,5. Найти пятый член этой прогрессии.

4. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 111. Второе больше первого в 5 раз. Найти первое число.

5. Первый член геометрической прогрессии равен 150, четвертый член 1,2. Найти пятый член прогрессии.

6. Найти сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если третий член этой прогрессии равен 2, а шестой равен $1/4$.

7. Сумма четвертого и шестого членов арифметической прогрессии равна 14. Найти сумму первых девяти членов прогрессии.

8. Второй и четвертый члены арифметической прогрессии соответственно равны 6 и 16. Найти пятый член прогрессии.

9. В геометрической прогрессии произведение второго и пятого членов равно -147, первый член равен $-\dfrac{7}{9}$. Найти знаменатель прогрессии.

10. Найти сумму всех трехзначных натуральных чисел, которые при делении на 5 дают остаток 1.

11. В арифметической прогрессии сумма первых пяти членов равна -25, первый член равен -11, а n-й член равен 25. Найдите n.

12. Найти 4 числа, образующие геометрическую прогрессию, если сумма первого и третьего равна 35, а сумма второго и четвертого равна (-70). В ответе записать сумму $4b_1+3b_2+2b_3+b_4$.

13. Сколько имеется двузначных натуральных чисел, кратных 6?

14. В геометрической прогрессии с положительными членами произведение третьего и пятого членов равно 256. Вычислите четвертый член прогрессии.

15. Сумма членов возрастающей арифметической прогрессии с шестого по двенадцатый включительно равна 28. Найти номер члена этой прогрессии, равного 4.

16. Сумма четырех первых членов арифметической прогрессии равна 56. Сумма четырех последних равна 112. Найти число членов прогрессии, если первый ее член равен 11.

17. Определить первый член и знаменатель геометрической прогрессии, у которой сумма первого и третьего членов равна 40, а сумма второго и четвертого равна 80. В ответе записать частное от деления b_1 на q.

18. Между числами 1 и 256 вставить три числа так, чтобы все пять чисел образовывали геометрическую прогрессию. В ответе записать произведение этих трех чисел.

19. Найти утроенный куб знаменателя бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если ее сумма в три раза больше суммы трех ее первых членов.

20. Сумма трех положительных чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 15. Если ко второму числу прибавить 1, к третьему 5, а первое оставить без изменения, то получится геометрическая прогрессия. Найти произведение исходных трех чисел.

21. В арифметической прогрессии $0,\ a_1,\ a_2, \ldots$ член $a_6=-12$. Найти сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $1,\ 2^{a_1},\ 2^{a_2},\ \ldots$.

22. Найти произведение корней уравнения

$$1-x^2+x^4-x^6+x^8+\ldots=\frac{7}{13}, \quad |x|<1.$$

23. Область определения функции $f(x)=3\cdot(-2)^x$ — первые восемь натуральных чисел. Найти сумму значений функции.

24. Область определения функции $y=5-2x$ — множество первых тридцати натуральных чисел. Чему равна сумма всех значений функции?

25. Сумма трех чисел равна $\frac{11}{18}$, а сумма обратных чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 18. Найдите эти числа.

26. Три числа являются последовательными членами геометрической прогрессии. Если от третьего отнять 4, то эти числа будут последовательными членами арифметической прогрессии. Если же от второго и третьего членов полученной прогрессии отнять по единице, то полученные числа снова будут последовательными членами геометрической прогрессии. Найти эти числа.

27. Даны четыре числа, из которых первые три являются тремя последовательными членами геометрической, а последние три — членами арифметической прогрессии. Сумма крайних чисел равна 32, сумма средних чисел равна 24. Найти эти числа.

28. Первые члены арифметической и геометрической прогрессий одинаковы и равны 2, третьи члены также одинаковы, а вторые отличаются на 4. Найти эти прогрессии, если все их члены положительны.

29. Найти n-й член арифметической прогрессии, если сумма первых n ее членов равна $3n^2-2n$.

30. Найти число, если известно, что после вычитания из него $\frac{1}{6}$ его части и прибавления к полученной разности его пятой части получается 9,3.

31. Автомобиль выехал, имея на борту груз, составляющий $\frac{4}{5}$ его грузоподъемности. На первой остановке он выгрузил $\frac{1}{6}$ часть груза, на второй взял на борт $\frac{1}{3}$ своей грузоподъемности, на третьей остановке выгрузил $\frac{2}{3}$ привезенного груза. В результате в пункт прибытия он привез 5 т. Какова грузоподъемность автомобиля?

32. Из резервуара идут три трубы. Через первые две трубы содержимое резервуара откачивается за 1 ч 10 мин, через первую и третью — за 1 ч 24 мин, а через вторую и третью — за 2 ч 20 мин. За какое время содержимое резервуара откачивается всеми тремя трубами вместе?

33. Разложить число 17 на два слагаемых так, чтобы их произведение было равно 16. Найти результат деления большего из этих чисел на меньшее.

34. Грузовик врезался в фонарный столб, который на некоторой высоте надломился, и в результате верхушка столба коснулась земли в 3,5 м от основания. Найти высоту целого столба, если оставшаяся стоять часть столба составляла $\frac{4}{9}$ его длины.

35. Из города A в город B выезжает велосипедист, а через три часа после его выезда из города B выезжает навстречу ему мотоциклист, скорость которого в три раза больше скорости велосипедиста. Велосипедист и мотоциклист встречаются посередине между A и B. Если бы мотоциклист выехал не через три часа, а через два часа после велосипедиста, то встреча произошла бы на 15 км ближе к A. Найти расстояние между A и B.

36. От пристани отправился по течению реки плот. Через 5 ч 20 мин вслед за плотом от той же пристани отправилась моторная лодка, которая догнала плот, пройдя 20 км. Какова скорость плота, если известно, что собственная скорость моторной лодки больше скорости плота на 9 км/ч?

37. В сладком сиропе было 97 % воды. После того, как часть воды испарилась, в нем стало 95 % воды. На сколько процентов уменьшился объем сиропа?

38. В чашку с кофе добавили молоко, при этом объем содержимого чашки увеличился на 12 %. Сколько процентов получившегося напитка необходимо отпить, чтобы в чашке остался такой же объем напитка, какой был до добавления молока?

39. Из пункта A в пункт B выехал автомобиль, и одновременно из пункта B в пункт A выехал велосипедист. После встречи они продолжали свой путь. Автомобиль, доехав до пункта B, повернул назад и догнал велосипедиста через 2 часа после момента первой встречи. Сколько времени после первой встречи ехал велосипедист до пункта A, если известно, что к моменту второй встречи он проехал $2/5$ всего пути от B к A?

40. В банк поместили вклад в размере 2000 руб. под 50 % годовых. В конце каждого из первых двух лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу третьего года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 350 %. Какую сумму вкладчик добавлял к вкладу?

41. Два тела, движущиеся в разные стороны по окружности длиной 1 м с постоянными скоростями, встречаются каждые 6 с. При движении в одну сторону первое тело догоняет второе каждые 48 с. Найти линейные скорости этих тел.

42. Первый тракторист вспахивает поле на 3 ч медленнее второго, а вместе они вспахивают то же поле за $3\frac{1}{13}$ ч. Найти число часов, за которое один первый тракторист выполняет эту работу.

43. В бассейн проведены две трубы — подающая и отводящая, причем через первую трубу бассейн наполняется на 2 часа дольше, чем через вторую опорожняется. При заполненном на одну треть бассейне были открыты обе трубы, и бассейн оказался пустым спустя 8 часов. За сколько часов одна первая труба может наполнить пустой бассейн, и за сколько часов одна вторая труба может опорожнить полный бассейн?

44. Известно, что вклад, находящийся в банке в начале года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года $5/6$ некоторого количества рублей положили в первый банк, а оставшуюся часть — во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равна 670 руб., к концу следующего года — 749 руб. Было подсчитано, что если бы первоначально $5/6$ исходного капитала положили бы во второй банк, а оставшуюся часть — в первый, то по истечении года сумма вклада в эти банки стала бы равной 710 руб. В предположении, что исходное количество денег первоначально целиком положено в первый банк, определить величину вклада по истечении двух лет.

45. В сосуд емкостью 6 л налито 4 л 70 %-ного раствора серной кислоты. Во второй сосуд той же емкости налито 3 л 90 %-ного раствора серной кислоты. Сколько литров раствора нужно перелить из второго сосуда в первый, чтобы в нем получился r %-ный раствор серной кислоты? Найти все значения r, при которых задача имеет решение.

46. Из сосуда, до краев наполненного чистым глицерином, отлили 2 л глицерина, а к оставшемуся глицерину долили 2 л воды. После перемешивания снова отлили 2 л смеси и долили 2 л воды. Наконец, опять перемешали, отлили 2 л смеси и долили 2 л воды. В результате этих операций объем воды в сосуде стал на 3 л больше объема оставшегося в нем глицерина. Сколько литров глицерина и воды оказалось в сосуде в результате проделанных операций?

47. Группа студентов, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки 2, 3, 4, 5. Сумма полученных оценок равна 93, причем троек было больше, чем пятерок, и меньше, чем четверок. Кроме того, число четверок делилось на 10, а число пятерок было четным. Определить, сколько каких оценок получила группа?

48. В первой коробке находилось некоторое количество красных шаров, а во второй — синих, причем число красных шаров составляло $15/19$ от числа синих шаров. Когда из коробок удалили $3/7$ красных шаров и $2/5$ синих, то в первой коробке осталось менее 1000 шаров, а во второй — более 1000 шаров. Сколько шаров первоначально было в каждой коробке?

49. Три экскаватора разной производительности рыли котлован. Если бы производительность первого была в 2 раза, а третьего — в 3 раза больше, чем в действительности, то котлован был бы вырыт за 5 дней. Если бы производительность первого была в 3 раза, второго — в 2 раза, а третьего — в 4 раза больше, чем в действительности, то котлован был бы вырыт за $3\frac{3}{4}$ дня. За сколько дней котлован был вырыт?

50. Пассажир поезда знает, что на данном участке пути скорость его поезда равна 40 км/ч. Как только мимо окна начал проходить встречный поезд, пассажир пустил секундомер и заметил, что встречный поезд прошел мимо окна за 3 с. Определить скорость встречного поезда, если известно, что его длина равна 75 м.

2.4. Домашнее задание

1. В арифметической прогрессии дано: $a_p = q$, $a_q = p$ $(q \neq p)$ найти формулу общего члена a_n прогрессии.
2. Найти первый и пятый члены геометрической прогрессии, если известно, что знаменатель ее равен 3, а сумма шести ее первых членов равна 1820.
3. Три числа, из которых третьим является 12, являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии. Если вместо 12 взять 9, то эти три числа будут тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Найти эти числа.
4. Известно, что при любом n сумма S_n первых n членов некоторой арифметической прогрессии выражается формулой

$$S_n = 4n^2 - 3n.$$

Найти общий член прогрессии.
5. В геометрической прогрессии произведение второго и пятого членов равно 7,2, первый член равен 150. Найти знаменатель прогрессии.
6. Найти сумму всех четных двузначных чисел.
7. В геометрической прогрессии разность первого и второго членов равна 9, разность первого и третьего членов равна -9, а n-й член равен -384. Найти n.
8. Найти четыре последовательных члена геометрической прогрессии, из которых второй член меньше первого на 35, а третий больше четвертого на 560.
9. Найти (отличный от 0) знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой каждый член в 4 раза больше суммы всех последующих членов (считается, что $b_1 \neq 0$).
10. Сумма второго и восьмого членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $\frac{325}{128}$, а сумма второго и шестого, уменьшенная на $\frac{65}{32}$, равна четвертому члену этой прогрессии. Найти сумму квадратов всех членов этой прогрессии.
11. Область определения функции $y = 18 - 2x$ — множество первых сорока натуральных чисел. Найти сумму всех значений функции.
12. Найти сумму всех трехзначных натуральных чисел, которые при делении на 5 дают остаток 4.
13. Сумма членов возрастающей арифметической прогрессии со второго по двенадцатый включительно равна 44. Найти номер члена этой прогрессии, равного 4.
14. Среди одиннадцати членов арифметической прогрессии первый, пятый и одиннадцатый являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найти формулу общего члена этой арифметической прогрессии, если первый ее член равен 24.
15. В некоторой арифметической прогрессии второй член является средним пропорциональным между первым и четвертым. Показать, что четвертый, шестой и девя-

тый члены этой прогрессии являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найти знаменатель этой прогрессии.

16. Найти n-й член арифметической прогрессии, если сумма первых n ее членов равна $\frac{1}{3}(n^2 - 4n)$.

17. Для прокладки траншеи выделены два экскаватора разных типов. Время, необходимое первому экскаватору для самостоятельной прокладки траншеи, на 3 часа меньше времени, необходимого второму экскаватору. Сумма этих времен в $4\frac{4}{35}$ раза больше времени, необходимого для прокладки траншеи при совместной работе двух экскаваторов. Определить, сколько времени нужно экскаватору для самостоятельной прокладки траншеи?

18. Бассейн был наполнен водой несколькими насосами одинаковой производительности, которые включались в работу один за одним через равные промежутки времени. Первый насос перекачал на V л больше последнего. Если промежутки времени между включениями насосов уменьшить втрое, то время наполнения уменьшится на 10 %. Какой объем воды перекачает каждый насос при наполнении бассейна, если одновременно включить все насосы?

19. С двух участков поля собрано 330 т пшеницы. Если бы с каждого гектара первого участка поля было собрано столько пшеницы, сколько ее собирали с каждого гектара второго участка, то с обоих участков было бы собрано 405 т, а если бы с каждого гектара второго участка было собрано столько пшеницы, сколько собрали с каждого гектара первого участка, то с обоих участков было бы собрано 270 т. Сколько зерна было собрано с каждого участка в отдельности?

20. В двух ящиках находится более 29 одинаковых деталей. Число деталей в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем в 3 раза превышает число деталей во втором ящике. Утроенное число деталей в первом ящике меньше удвоенного числа деталей во втором ящике увеличенного на 60. Сколько деталей в каждом ящике?

21. Имеются два сплава, состоящих из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40 % олова, а второй — 26 % меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором 30 % цинка. Определить, сколько килограммов олова содержится в новом сплаве.

22. При перемножении чисел, из которых одно на 10 больше другого, была допущена ошибка: цифру десятков в произведении уменьшили на 4. При делении (для проверки счета) полученного произведения на меньший множитель получили в частном 39, а в остатке 22. Найти множители.

23. В течение года завод дважды увеличивал выпуск продукции на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что в начале года завод ежемесячно выпускал 600 единиц изделий, а в конце года стал выпускать ежемесячно 726 изделий.

24. Бригада рабочих должна была изготовить 360 деталей. Изготовляя ежедневно на 4 детали больше, чем предполагалось по плану, бригада выполнила задание на день раньше срока. Сколько дней затратила бригада на выполнение задания?

25. С поезда сошли два пассажира и направились в один и тот же пункт. Первый шел половину времени со скоростью a км/ч, вторую половину — b км/ч, а второй первую половину пути — со скоростью b км/ч, вторую половину пути — со скоростью

a км/ч. Который из них пришел быстрее к месту назначения?

2.5. Проверочный тест

1. Если второй член геометрической прогрессии равен 2, а пятый член равен 16, то сумма ее первых шести членов равна

1) 64; 2) 65; 3) 81; 4) 79; 5) 63.

2. Если сумма пяти первых членов арифметической прогрессии равна 60, а разность четвертого и второго членов равна 8, то пятый член прогрессии равен

1) 20; 2) 18; 3) 17; 4) 24; 5) 22.

3. В арифметической прогрессии, второй член которой равен 7, а седьмой член равен 2, четвертый член равен

1) 3; 2) $3,5$; 3) 4; 4) $4,5$; 5) 5.

4. В геометрической прогрессии разность между третьим и вторым членами равна 90, а разность между четвертым и вторым членами равна -360. Тогда третий член этой прогрессии равен

1) 5; 2) 25; 3) 50; 4) 75; 5) 100.

5. Грузовик и гоночный автомобиль выехали одновременно из пункта A и должны прибыть в пункт C. Грузовик, двигаясь с постоянной скоростью, доехал до пункта C, проделав путь, равный 360 км. Гоночный автомобиль поехал по окружной дороге и сначала доехал до пункта B, расположенного в 120 км от пункта A, двигаясь со скоростью, вдвое большей скорости грузовика. После пункта B он увеличил скорость на 40 км/ч и проехал путь от пункта B до пункта C, равный 1000 км. Он прибыл в пункт C на 1 ч 15 мин позднее грузовика. Если бы гоночный автомобиль весь свой путь от пункта A до пункта C ехал с той же скоростью, что от пункта B до пункта C, то в пункт C он прибыл бы на 1 ч позднее грузовика. Тогда скорость грузовика равна

1) 60; 2) 45; 3) 50; 4) 70; 5) 65.

6. Производительность завода A составляет 40,96 % производительности завода B. Годовой процент прироста продукции на заводе A на 30 % больше годового прироста продукции на заводе B. Тогда годовой процент прироста продукции на заводе A, если на четвертый год работы завод A даст то же количество продукции, что и завод B, равен

1) 600 %; 2) 500 %; 3) 650 %; 4) 700 %; 5) 750 %.

7. Искомое трехзначное число оканчивается цифрой 1. Если эту цифру перенести с последнего места на первое, сохранив порядок остальных цифр, то вновь полученное число будет меньше искомого на 90. Тогда искомое число равно

1) 200; 2) 210; 3) 221; 4) 211; 5) 215.

8. Найти сумму всех натуральных трехзначных чисел, каждое из которых обладает следующими двумя свойствами: 1) первая цифра числа в 3 раза меньше суммы двух ее других цифр, 2) разность между самим числом и числом, получающимся из него перестановкой двух последних цифр, неотрицательна и делится на 81 без остатка.

9. Бак наполняется двумя кранами A и B. Наполнение бака через кран A длится на 22 мин дольше, чем наполнение бака через кран B. Если же открыть оба крана, то бак наполнится за 1 ч. Найти время наполнения бака краном B (в минутах).

10. Сумма трех чисел, образующих возрастающую геометрическую прогрессию, равна 39. Если первое число умножить на -3, то получится арифметическая прогрессия. Найти произведение первоначальных чисел.

2.6. Ответы

Аудиторные задачи:

1. -1; **2.** 518,4; **3.** 8; **4.** 7,4; **5.** 0,24; **6.** 16; **7.** 63; **8.** 21; **9.** -3; **10.** 98 730; **11.** 13; **12.** -14; **13.** 15; **14.** 16; **15.** 9; **16.** 11; **17.** 4; **18.** 4096; **19.** 2; **20.** 105; **21.** $\frac{4}{3}$; **22.** $-\frac{6}{7}$; **23.** 510; **24.** -780; **25.** 1/3, 1/6, 1/9; **26.** $(1, 3, 9)$ и $(1/9, 7/9, 49/9)$; **27.** (32, 16, 8, 0) и (2, 6, 18, 30); **28.** (2, 10, 18, ...) и (2, 6, 18, ...); **29.** $6n-5$; **30.** 9; **31.** 15 т; **32.** 1 ч; **33.** 16; **34.** 10,5 м; **35.** 180 км; **36.** 3 км/ч; **37.** 40 %; **38.** $10\frac{5}{7}$ %; **39.** 8 ч 45 мин; **40.** 600; **41.** Скорость первого тела равна 3/32 м/сек, а второго тела — 7/96 м/сек; **42.** 8; **43.** 8 часов и 6 часов; **44.** 726 руб.; **45.** $\frac{4(r-70)}{90-r}$ л, задача имеет решение при $70 \leqslant r \leqslant 76\frac{2}{3}$; **46.** 0,5 л и 3,5 л; **47.** Пятерок — 2, четверок — 10, троек — 7, двоек — 11; **48.** 1575 и 1995; **49.** 15 дней; **50.** 50 км/ч. *Указание*: учесть, что скорость встречного поезда относительно наблюдателя, находящегося в одном из поездов, равна сумме скоростей поездов.

Домашнее задание:

1. $a_n = p+q-n$; **2.** $b_1 = 5$, $b_5 = 405$; **3.** 3, 6, 12 и 27, 18, 12; **4.** $a_n = 8n-7$; **5.** 0,2; **6.** 2430; **7.** 8; **8.** $-\frac{35}{3}$, $-\frac{140}{3}$, $-\frac{560}{3}$, $-\frac{2240}{3}$ и 7, -28, 112, -448; **9.** $q = \frac{1}{5}$; **10.** $\frac{100}{3}$; **11.** -920; **12.** 99270; **13.** 7; **14.** $24+3(n-1)$ и $24+0(n-1)$; **15.** $q = 3/2$, $q = 1$; **16.** $\frac{1}{3}(2n-5)$; **17.** 7,5 ч и 10,5 ч; **18.** $\frac{17}{6}V$ л; **19.** С участков было собрано 180 т и 150 т пшеницы соответственно; **20.** 23 и 7; **21.** 170 кг; **22.** 31 и 41; **23.** 10 %; **24.** 9 дней; **25.** Первый быстрее, так как $\frac{2s}{a+b} < \frac{s}{2}\frac{a+b}{ab}$, где s — весь путь.

3. Рациональные уравнения

Равенство, тождество, уравнение. Корень уравнения. Равносильные уравнения и неравносильные преобразования при решении уравнений. Расширение и сужение области допустимых значений уравнения. Линейные уравнения. Уравнения с параметром. Квадратные уравнения. Дискриминант. Формула для решения квадратных уравнений. Теоремы Виета, прямая и обратная. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители. Биквадратные уравнения. Рациональные уравнения. Многочлен с одной переменной. Корень многочлена, теорема Безу, разложение многочлена на множители.

3.1. Справочный материал

Уравнением (с одним неизвестным x) называется выражение вида

$$f(x)=g(x),$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции.

Областью допустимых значений (ОДЗ) уравнения $f(x)=g(x)$ называется общая часть (пересечение) областей существования функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$, т. е. множество всех числовых значений неизвестного x, при каждом из которых имеют смысл (т. е. определены) левая и правая части уравнений.

Любое число x из ОДЗ уравнения называется *допустимым значением* для данного уравнения.

Число α из ОДЗ уравнения $f(x)=g(x)$ называется *решением (корнем)* этого уравнения, если при подстановке его вместо x получается верное числовое равенство $f(\alpha)=g(\alpha)$.

Решить уравнение $f(x)=g(x)$ — значит найти *все* его корни или доказать, что уравнение не имеет корней.

При решении конкретного уравнения полезно знать его ОДЗ, так как иногда ее нахождение позволяет доказать, что уравнение не имеет решений, а в некоторых случаях непосредственная подстановка чисел из ОДЗ в уравнение позволяет найти корни уравнения.

Так, например, для уравнения

$$\sqrt{2-x}=\sqrt{x-3}$$

область допустимых значений состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $2-x\geqslant 0$ и $x-3\geqslant 0$, т. е. ОДЗ есть пустое множество. На этом решение уравнения и завершается, так как установлено, что уравнение не имеет корней.

Для уравнения

$$\sqrt{x}=\sqrt{-x}$$

ОДЗ состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $x\geqslant 0$ и $-x\geqslant 0$, т. е. из единственного числа $x=0$. Подставляя это значение x в уравнение, получаем, что $x=0$ — единственный его корень.

Нахождение ОДЗ уравнения не всегда обязательно. Так, например, уравнение

$$\sqrt{x^2+x+1}+x^2=-2$$

не имеет корней, поскольку при любом значении x из его ОДЗ (мы ее не находили) левая часть уравнения неотрицательна, а правая — отрицательна.

Пусть даны два уравнения

$$f_1(x)=g_1(x) \text{ и } f_2(x)=g_2(x).$$

Если любой корень первого уравнения $f_1(x)=g_1(x)$ является корнем второго уравнения $f_2(x)=g_2(x)$, то второе уравнение называется *следствием* первого уравнения.

Если при решении использовать только преобразования, приводящие к уравнению-следствию, то нахождение ОДЗ также не обязательно. Но при этом нужно выполнить *проверку* найденных корней. При переходе к следствию не происходит потери корней, но могут появиться посторонние корни.

Полезно знать, что:

1) при возведении в натуральную степень обеих частей уравнения можно приобрести посторонние корни (при этом *не происходит потери корней*);

2) при освобождении уравнения от знаменателя можно приобрести посторонние корни (*потери корней не происходит*);

3) замена в уравнении выражения $\varphi(x)+(-\varphi(x))$ нулем (приведении подобных членов) может привести к появлению посторонних корней (*потери корней не происходит*).

Пусть даны два уравнения: $f_1(x)=g_1(x)$ и $f_2(x)=g_2(x)$. Если любой корень первого уравнения является корнем второго уравнения, а любой корень второго – корнем первого, то такие два уравнения называются *равносильными (или эквивалентными)*.

Утверждения о равносильности уравнений

1. Уравнения $f(x)=g(x)$ и $f(x)-g(x)=0$ равносильны.

2. Уравнения $f(x)=g(x)$ и $f(x)+\alpha=g(x)+\alpha$ равносильны.

3. Уравнения $f(x)=g(x)$ и $\alpha f(x)=\alpha g(x)$ равносильны для любого числа $\alpha\neq 0$.

4. Если функции $y=\varphi(x)$ и $y=g(x)$ тождественно равны, то уравнения $f(x)=g(x)$ и $f(x)=\varphi(x)$ равносильны.

Пусть даны уравнения $f_1(x)=g_1(x)$ и $f_2(x)=g_2(x)$ и некоторое множество M.

Если любой корень первого уравнения, принадлежащий множеству M, удовлетворяет второму уравнению, а любой корень второго уравнения, принадлежащий M, удовлетворяет первому, то эти уравнения называются *равносильными на множестве* M.

Приведенные выше утверждения о равносильности уравнений справедливы и на любом множестве. Приведем теперь другие утверждения о равносильности уравнений на множестве.

Утверждения о равносильности уравнений на множестве

1. Пусть n — натуральное число и на некотором множестве M функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ неотрицательны. Тогда на этом множестве M уравнения $f(x)=g(x)$ и $f^n(x)=g^n(x)$ равносильны.

2. Пусть функция $y=\varphi(x)$ определена и не обращается в нуль ни в одной точке множества M. Тогда на этом множестве M уравнения $f(x)=g(x)$ и $f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x)$ равносильны.

Отметим, что часто множество M совпадает либо с ОДЗ уравнения $f(x)=g(x)$, либо с множеством всех действительных чисел.

Сокращение уравнения на общий множитель

Уравнения вида $\varphi(x)\cdot f(x)=\varphi(x)\cdot g(x)$ нельзя делить на $\varphi(x)$, это может привести к потере корней. Их надо решать следующим образом:

1) найти ОДЗ уравнения;

2) переписать уравнение в равносильном виде:

$$\varphi(x)\cdot[f(x)-g(x)]=0;$$

3) перейти от этого уравнения к равносильной ему на ОДЗ исходного уравнения совокупности уравнений

$$\varphi(x)=0 \text{ и } f(x)-g(x)=0;$$

4) решить эту совокупность уравнений на ОДЗ исходного уравнения; множество всех корней данной совокупности, каждый из которых принадлежит ОДЗ исходного уравнения, и есть множество корней исходного уравнения.

Линейные уравнения

Уравнение вида $ax+b=0$, где a и b – некоторые постоянные, называется *линейным* уравнением.

Если $a\neq 0$, то линейное уравнение имеет *единственный* корень $x=-\dfrac{b}{a}$.

Если $a=0$; $b\neq 0$, то линейное уравнение решений не имеет.

Если $a=0$ и $b=0$, то, переписав исходное уравнение в виде $ax=-b$, легко видеть, что любое x является решением линейного уравнения.

Квадратные уравнения

Уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где a, b, c — некоторые числа ($a\neq 0$); x — переменная, называется *квадратным уравнением*. Для решения квадратного уравнения следует вычислить дискриминант $D=b^2-4ac$.

Если $D=0$, то квадратное уравнение имеет *единственное* решение

$$x=-\frac{b}{2a}.$$

Часто в этом случае говорят, что уравнение имеет *два равных* корня (или один корень кратности 2), поскольку в этом случае

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Если $D>0$, то квадратное уравнение имеет два (различных) корня

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a};\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

Если $D<0$, то квадратное уравнение не имеет (действительных) корней.

Если один из коэффициентов b или c равен нулю, то квадратное уравнение можно решать, не вычисляя дискриминанта:

1) $b=0$; $c\neq 0$; $\dfrac{c}{a}<0$;	2) $b\neq 0$; $c=0$;
$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$;	$x_1=0$; $x_2=-\dfrac{b}{a}$.

Уравнение вида
$$x^2+px+q=0 \tag{1}$$
называется *приведенным* квадратным уравнением. Его дискриминант $D=p^2-4q$.

Для уравнений вида $ax^2+2bx+c=0$ формула нахождения корней упрощается
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}.$$

Теорема Виета (прямая) утверждает: если у квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ есть корни x_1 и x_2, то выполняются соотношения
$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Обратная теорема утверждает: если для некоторых постоянных a, b, c существуют числа x_1 и x_2, удовлетворяющие соотношениям
$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}, \end{cases}$$
то эти числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Для приведенного квадратного уравнения вида (1) теорема Виета упрощается
$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1x_2=q. \end{cases}$$

При решении задач, связанных с теоремой Виета, полезно использовать соотношения
$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2};$$
$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2;$$
$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2};$$
$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-3x_1x_2).$$

Рациональные уравнения

Рациональным алгебраическим уравнением называется уравнение вида
$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0,$$
где $P(x)$ и $Q(x)$ — некоторые многочлены.

Множество допустимых значений рационального уравнения определяется условием $Q(x)\neq 0$.

Метод решения рационального уравнения заключается в следующем. Решаем уравнение

$$P(x)=0,$$

корни которого обозначим через $x_1,\dots,x_m$. Подставляем эти корни в знаменатель $Q(x)$ и выбираем те из них, для которых знаменатель не равен 0.

Обсудим способы нахождения корней многочленов. Есть формулы для нахождения корней уравнений третьей и четвертой степени, но они настолько громоздки, что их не применяют. Для уравнений степени больше 4 таких (универсальных) формул нет.

Метод замены переменной. Если многочлен $P(x)$ является многочленом P_1 от переменной $y=R(x)$, то делаем замену $y=R(x)$. Решаем уравнение меньшей степени $P_1(y)=0$, получаем какие-то значения $y_1,\dots,y_s$, а затем решаем уравнения $R(x)=y_i$, $i=1,\dots,s$.

Разложение многочлена на множители. Если мы каким-то образом разложили многочлен $P(x)$ на несколько множителей $P(x)=P_1(x)\cdots P_l(x)$, то решение уравнения $P(x)=0$ сводится к решению более простых уравнений $P_i(x)=0$.

В общем случае нет универсального способа разложения многочлена на множители. Известна лишь *теорема Безу*, которая утверждает следующее:

Если число c является корнем многочлена $P(x)$, то многочлен $P(x)$ делится на $(x-c)$, т. е.

$$P(x)=(x-c)P_1(x),$$

где многочлен $P_1(x)$ можно получить из $P(x)$ делением "уголком" на $x-c$.

Таким образом, если один корень многочлена $P(x)$ известен, то задача нахождения остальных корней облегчается, поскольку нужно находить корни многочлена $P_1(x)$ меньшей степени.

Для многочлена с целыми коэффициентами имеет место следующее свойство.

Если многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет рациональный корень $\dfrac{m}{n}$ (и эта дробь несократима), то m является делителем свободного члена многочлена P, а n — делителем коэффициента при старшей степени x.

Есть очень много частных методов нахождения корней многочленов.

3.2. Примеры

Пример 1. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2-6x+9=0$ имеет одно решение?

Решение. При $a=0$ это уравнение становится линейным и имеет один корень $x=3/2$.

При $a\neq 0$ найдем дискриминант $D=36-36a$ и приравняем его к нулю.

Ответ: $a=1$, $a=0$.

Пример 2. При каких значениях a парабола $y=x^2-ax+1$ не пересекает ось OX?

Решение. На оси OX имеем $y=0$, поэтому задача сводится к следующей: при каких значениях a уравнение $x^2-ax+1=0$ не имеет действительных решений? Найдем дискриминант $D=a^2-4$ и решим неравенство $a^2-4<0$.

Ответ: $-2<a<2$.

Пример 3. Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $x^2+x-7=0$. Не решая уравнения, найти $x_1^2+x_2^2$.

Решение. По теореме Виета $x_1+x_2=-1$, а $x_1x_2=-7$, тогда $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=1+14=15$.

Ответ: 15.

Пример 4. Решить уравнение

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{2x^2-3x+1}.$$

Решение. ОДЗ уравнения состоит из всех чисел, отличных от корней уравнений $x^2-3x+2=0$ и $2x^2-3x+1=0$, т. е. от чисел $1, 2, \frac{1}{2}$.

На этой области обе функции $y=x^2-3x+2=0$ и $y=2x^2-3x+1=0$ определены и отличны от нуля. Поэтому, умножив уравнение на произведение знаменателей, получим уравнение

$$x^2-3x+2=2x^2-3x+1,$$

равносильное исходному уравнению на его ОДЗ. После приведения подобных членов получаем уравнение $x^2-1=0$, имеющее два корня $x_2=1$ и $x_1=-1$, из которых только один $x_1=-1$ лежит в ОДЗ исходного уравнения.

Ответ: $x_1=-1$.

Пример 5. Решить уравнение

$$(x^2-2x)^2-(x-1)^2+1=0.$$

Решение. Обозначим $y=(x-1)^2$, тогда исходное уравнение примет вид

$$(y-1)^2-y+1=0.$$

Его решениями являются числа 1, 2. Таким образом получаем уравнения

$$(x-1)^2=1, \qquad (x-1)^2=2.$$

Решая их получаем корни $x_1=2$, $x_2=0$, $x_{3,4}=1\pm\sqrt{2}$.

Ответ: Корни уравнения $x_1=2$, $x_2=0$, $x_{3,4}=1\pm\sqrt{2}$.

Пример 6. Решить уравнение

$$3x^3-4x^2+5x-18=0.$$

Решение. Множеством чисел вида m/n, где m — делитель -18, а n делитель 3, являются числа $\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm1/3, \pm2/3\}$. Подставляя эти числа в исходное уравнение, получаем, что корень равен 2.

Делим исходный многочлен на $(x-2)$ "уголком получаем многочлен $3x^2+2x+9$, который действительных корней не имеет.

Ответ: $x=2$.

Пример 7. Найти сумму всех значений параметра k, при которых уравнение $4x^2+$ $+(9+k)x+(6+k)=0$ имеет один корень.

Решение. Квадратное уравнение имеет один корень, если $D=0$.

$$D=(9+k)^2-16(6+k)=k^2+2k-15=0, \quad k_1=-5, \quad k_2=3, \quad k_1+k_2=-2.$$

Ответ: -2.

Пример 8. Указать наибольшее целое значение параметра k, при котором уравнение $2x^2+(k-4)x-(k+8)=0$ имеет два различных корня одного знака.

Решение. Уравнение имеет два различных корня, если $D>0$. По теореме Виета произведение корней $x_1\cdot x_2=c/a=-k-8$. Корни имеют одинаковый знак, если их произведение больше нуля. Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} (k-4)^2+8(k+8)>0, \\ -k-8>0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^2+80>0, \\ k<-8. \end{cases}$$

Первое неравенство выполняется для всех k, поэтому уравнение имеет два различных корня одного знака при $k<-8$. Наибольшее целое значение, удовлетворяющее неравенству, $k=-9$.

Ответ: -9.

Пример 9. Указать наибольшее целое значение параметра d, при котором уравнение $x^2+dx-10=0$ имеет только один корень на интервале $(-7,-2)$.

Решение. Дискриминант $D=d^2+40>0$ при любом d, поэтому уравнение имеет два корня, из которых только один должен принадлежать данному интервалу. В этом случае значения функции $y=x^2+dx-10$ в точках -7 и -2 должны быть разных знаков, или $y(-7)\cdot y(-2)<0$. Получим неравенство $(39-7d)(-6-2d)<0$, решением которого является множество $(-3;39/7)$. Наибольшее целое число, принадлежащее интервалу, $d=5$.

Ответ: 5.

Пример 10. При каких значениях параметра d уравнение $x^3-9x^2+24x+d=0$ имеет три различных корня?

Решение. Исследуем функцию $y=x^3-9x^2+24x+d$. Так как $y'=3x^2-18x+24$, точками экстремума являются $x_1=2$ – точка максимума и $x_2=4$ – точка минимума. Уравнение имеет три различных корня, если значения $y(2)$ и $y(4)$ имеют разные знаки. Получим неравенство $(d+20)(d+16)<0$, решением которого является множество $(-20;-16)$ (см. рис. 1).

Ответ: $d\in(-20;-16)$.

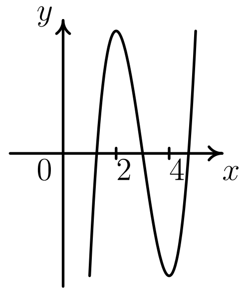

Рис. 1

3.3. Аудиторные задачи

Решить уравнения:

1. $\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}+\frac{4}{3}x=0.$

2. $\frac{x}{2}+\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{20}+\frac{x}{30}+\frac{x}{42}=-6.$

3. $(x-3)^2-x(x+4)=15-10x.$

4. $\frac{4+x}{4x-2}+\frac{3}{4}=0.$

5. $5-3(x-2(x-2(x-2)))=2.$

6. $x^2-5x+6=0.$

7. $x+\frac{1}{x}=2,5.$

Найти среднее арифметическое всех действительных корней уравнения:

8. $x^3-13x-12=0.$

9. $(x-1)(x+3)^3+(1-x)(x-4)^3=91(x-1).$

10. Найти сумму кубов действительных корней уравнения

$$\frac{1}{x^3+8}-\frac{1}{x^3+9}=\frac{1}{12}.$$

При каких значениях параметра a уравнения имеют бесконечно много решений:

11. $\frac{3a}{x-a}-\frac{a}{x-2a}=\frac{a}{x-a}-\frac{2a}{x-2a}.$

12. $6(ax-1)-a=2(a+x)-7.$

При каких значениях параметра a уравнения не имеют решений:

13. $\frac{x-5}{x+7}=\frac{a-x}{x+7}.$

14. $a^2x=a(x+2)-2.$

15. При каком значении параметра a прямая $y=ax-3$ проходит через точку $A(-2,9)$?

При каких значениях параметра a уравнения имеют одно решение:

16. $ax^2-6x+9=0.$

17. $x^2+ax+\frac{1}{4}=0.$

Решить уравнения:

18. $x^3-5x^2+6x=0.$

19. $x^3-3x^2-x+3=0.$

20. $\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{2}{x^2+2}=2.$

21. $\dfrac{8x^3+1}{4x+2}=x+2.$

22. $(x+1)(x^2-5x)+6(x+1)=0.$

23. $\dfrac{2}{x^2-4}+\dfrac{x-4}{x^2+2x}=\dfrac{1}{x^2-2x}.$

24. $\dfrac{x-3}{x^2+4x+9}+\dfrac{x^2+4x+9}{x-3}=-2.$

25. $x^2+\dfrac{1}{x^2}+x+\dfrac{1}{x}-4=0.$

26. $(x^2+x+1)^2-3x^2-3x-1=0.$

27. $x(x+1)(x+2)(x+3)=24.$

28. $\dfrac{1}{x^2+2x+4}-\dfrac{1}{x^2+2x+5}=\dfrac{1}{12}.$

29. $x^3+4x^2+4x+1=0.$

30. $2\left(x^2+\dfrac{4}{x^2}\right)+3\left(x-\dfrac{2}{x}\right)=13.$

31. $\dfrac{5}{x(x+4)}+\dfrac{8}{(x+1)(x+3)}=2.$

Найти произведение корней уравнения:

32. $(x^2-x+1)(x^2-x-1)=2.$

33. $x^3+8x^2-3x-24=0.$

34. $(x-0,9)(x^2-6x+8)=(3x-2,7)(x-4)^2.$

35. При каких a уравнение $ax^2-9x+108=0$ имеет два различных действительных корня?

36. При каких a уравнение $ax^2-3x+1=0$ имеет два различных положительных корня?

37. При каких значениях a парабола $y=9x^2-\dfrac{15}{2}x+2a$ касается оси Ox?

38. Найти сумму координат вершины параболы $y=3x^2-6x+5$.

39. Найти количество целых значений параметра a, при которых абсцисса и ордината вершины параболы $y=(x-12a)^2-a^2+7a-10$ положительны.

40. Вычислить $\dfrac{5(x_1+x_2)^3}{3x_1x_2}$, где x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $245x^2+21x-5=$ $=0$.

41. Составить квадратное уравнение с целыми коэффициентами, один из корней которого равен $\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}$.

42. Составить приведенное квадратное уравнение, корни которого в три раза больше корней уравнения $2x^2+5x+1=0$.

43. Пусть один из корней приведенного квадратного уравнения с рациональными коэффициентами равен $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. Чему равен свободный член этого уравнения?

44. При каком a корни уравнения $x^2+2ax+2=0$ положительны и отличаются на 1?

45. При каких k уравнение $5x^2+2kx+5=0$ имеет два равных отрицательных корня?

46. При каких q корни уравнения $x^2-4x+q=0$ удовлетворяют условию $5x_1+9x_2=0$?

47. При каких m уравнение $mx^2-4x+m=0$ имеет два различных отрицательных корня?
48. При каких значениях параметра a оба корня уравнения $x^2+ax-1=0$ меньше чем 3?
49. Найти все значения параметра a, при которых оба корня квадратного уравнения $x^2-ax+2=0$ принадлежат промежутку $(0,\ 3)$.
50. Составить квадратное уравнение, один из корней которого является средним арифметическим, а другой средним геометрическим корней уравнения

$$3x^2+16\sqrt{2}x+6=0.$$

3.4. Домашнее задание

1. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{8+5x}{2-x}=2a$ не имеет решения?
2. При каком b прямая $y=3x+b$ проходит через точку $A(-1,5)$?
3. При каком a уравнение $4x^2-ax+a-3=0$ имеет одно решение?
Решить уравнения:
4. $\dfrac{4}{x}+5=\dfrac{1}{x^2}$.
5. $2x^8+5x^4-7=0$.
6. $\dfrac{14x^2}{16-x^2}+\dfrac{11}{x-4}=\dfrac{49}{x+4}$.
7. $\dfrac{2}{x^2+3}+\dfrac{4}{x^2+7}=1$.
8. $\dfrac{x^2-3x}{x-2}+\dfrac{x-2}{x^2-3x}=2,5$.
9. $\dfrac{x^3-64}{4x-16}=\dfrac{9}{4}x+3$.
10. $(x^2-5x)^2-30(x^2-5x)-216=0$.
11. Найти произведение корней уравнения $(x^2-3x+1)(x^2-3x-1)=8$.
12. Найти сумму корней уравнения $\dfrac{x^2+3x-10}{x+5}=x^2+6x+4$.
13. Найти среднее арифметическое всех действительных корней уравнения x^3-12x+ $+16=0$.
14. Известно, что $x_1^2+x_2^2=13$, где x_1, x_2 — корни уравнения $x^2+ax+6=0$. Определить x_1+x_2.
15. При каких a уравнение $x^2-2x+7=a(1-x)$ имеет корни разных знаков?
16. При каких a парабола $y=(a-3)x^2-2ax+3a-6$ расположена выше оси Ox?
17. Найти произведение координат вершины параболы $y=-3x^2+12x-8$.
18. Найти количество целых значений параметра a, при которых абсцисса вершины параболы $y=(x-4a)^2+a^2+10a+21$ положительна, а ордината отрицательна.
19. При каких a в уравнении $x^2+(2a-1)x+a^2+2=0$ один корень больше другого в два раза?
20. При каких n уравнение $x^2+8x+2n=0$ имеет два различных отрицательных корня?

21. Найти все значения параметра a, при которых оба корня квадратного трехчлена
$$y=x^2-6ax+(2-2a+9a^2)$$
больше чем 3.

3.5. Проверочный тест

1. Пусть x — больший корень уравнения $x^2-7x+12=0$, а y — меньший корень уравнения $x^2-3x-40=0$, тогда значение выражения $x+y$ равно

1) 1; 2) 12; 3) 7; 4) -1; 5) -2.

2. Уравнение $ax^2+5x+2=0$ имеет два различных отрицательных корня при следующих значениях a:

1) $a<\dfrac{25}{8}$; 2) $a\in\left(-\dfrac{25}{8},0\right)$; 3) $a>\dfrac{25}{8}$; 4) $a<\dfrac{5}{4}$; 5) $a\in\left(0,\dfrac{25}{8}\right)$.

3. Если x_1 и x_2 — корни уравнения $3x^2-5x+1=0$, то значение выражения $\dfrac{5x_1^2x_2^2}{2(x_1+x_2)}$ равно

1) 6; 2) 1/2; 3) $-1/2$; 4) 1/6; 5) $-1/6$.

4. Дано уравнение $3x^2+x-5=0$. Значение свободного члена приведенного квадратного уравнения, корни которого в 3 раза больше корней данного, равно

1) -5; 2) 5; 3) -15; 4) 15; 5) 45.

5. Уравнение $x-10=\dfrac{c}{x}$ имеет два различных действительных корня, если c принадлежит множеству

1) $[25,+\infty)$; 2) $(-25,0)\cup(0,+\infty)$; 3) $[-25,0)\cup(0,+\infty)$; 4) $\varnothing$; 5) $(-25,+\infty)$.

6. Сумма действительных корней уравнения
$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=72$$
равна

1) -5; 2) 5; 3) -10; 4) 10; 5) 45.

7. Сумма квадратов корней уравнения
$$\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}=4$$
равна

1) 24; 2) 17; 3) 15; 4) 18; 5) 45.

8. Найти все p, при которых корни квадратного уравнения
$$(p-3)x^2-2px+5p=0$$
действительны и положительны.

9. Найти q, при котором корни уравнения
$$x^2-6x+q=0$$
удовлетворяют условию $2x_1-x_2=-27$.

10. Найти значения параметра d, при которых уравнение $x^3-9x^2+15x+d=0$ имеет один корень.

3.6. Ответы

Аудиторные задачи:

1. -3; **2.** -7; **3.** Нет решений; **4.** $-0,625$; **5.** 3; **6.** 2, 3; **7.** 0,5; 2; **8.** 0; **9.** $2/3$; **10.** -17; **11.** $a=0$; **12.** $a=\dfrac{1}{3}$; **13.** $a=-19$; **14.** $a=0$; **15.** $a=-6$; **16.** $a=0,\ a=1$; **17.** $a=-1,\ a=1$; **18.** 0, 2, 3; **19.** $-1,\ 1,\ 3$; **20.** 0; **21.** $1,5$; **22.** $-1,\ 2,\ 3$; **23.** 5; **24.** $-3,\ -2$; **25.** 1, $\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$, $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$; **26.** 0, -1, $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$; **27.** 1, -4; **28.** -1; **29.** -1, $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$; **30.** -1, 2, $\dfrac{-5+\sqrt{57}}{4}$, $\dfrac{-5-\sqrt{57}}{4}$; **31.** -5, 1, $\dfrac{-4+\sqrt{10}}{2}$, $\dfrac{-4-\sqrt{10}}{2}$; **32.** $-\sqrt{3}$; **33.** 24; **34.** 18; **35.** $a<\dfrac{3}{16},\ a\neq 0$; **36.** $0<a<\dfrac{9}{4}$; **37.** $a=\dfrac{25}{32}$; **38.** 3; **39.** 2; **40.** $\dfrac{9}{175}$; **41.** $x^2-6x+1=0$; **42.** $x^2+\dfrac{15}{2}x+\dfrac{9}{2}=0$; **43.** $-\dfrac{1}{2}$; **44.** $a=-\dfrac{3}{2}$; **45.** $k=5$; **46.** $q=-45$; **47.** $-2<m<0$; **48.** $a\in(-8/3,+\infty)$; **49.** $a\in[2\sqrt{2},11/3)$; **50.** $3x^2+x(8\sqrt{2}-6)-16\sqrt{2}=0$.

Домашнее задание:

1. $a=-2,5$; **2.** $b=8$; **3.** $a=4,\ a=12$; **4.** -1; 0,2; **5.** -1, 1; **6.** $-5\dfrac{5}{7}$; 3, **7.** -1, 1; **8.** 1, 4, $\dfrac{7-\sqrt{33}}{4}$, $\dfrac{7+\sqrt{33}}{4}$; **9.** 1; **10.** -4, 2, 3, 9; **11.** -3; **12.** -5; **13.** 0; **14.** -5, 5; **15.** $a>7$; **16.** $a>6$; **17.** 8; **18.** 0; **19.** $a=-4$; **20.** $0<n<8$; **21.** $a\in(11/9,+\infty)$.

4. Алгебраические уравнения и системы уравнений

Иррациональные уравнения, область допустимых значений. Уравнения с параметром и уравнения с модулем. Системы уравнений. Совместные и несовместные системы уравнений. Определенные и неопределенные системы уравнений. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Графический способ решения. Линейные системы с параметром. Различные системы уравнений (рациональные и иррациональные). Системы уравнений с параметром.

4.1. Справочный материал

Уравнения, сводящиеся к квадратным уравнениям.

Уравнение вида
$$f(x)\equiv a(g(x))^2+b(g(x))+c=0$$
называют квадратным уравнением относительно $g(x)$.

Для решения такого уравнения решают сначала квадратное уравнение (замена переменной $t=g(x)$).
$$at^2+bt+c=0.$$

Если дискриминант $D=b^2-4ac$ этого уравнения положителен, то уравнение имеет два корня t_1,t_2, и в этом случае уравнение $f(x)=0$ равносильно *совокупности*

уравнений
$$g(x)=t_1 \text{ и } g(x)=t_2.$$
Если $D=0$, то квадратное уравнение имеет единственное решение $t_0=-\dfrac{b}{2a}$, и в этом случае уравнение $f(x)=0$ равносильно уравнению

$$g(x)=-\frac{b}{2a}.$$

Если же $D<0$, то квадратное уравнение, а значит, и уравнение $f(x)=0$ не имеют решений.

Иррациональные уравнения

Иррациональным уравнением называют уравнение, в котором неизвестная величина содержится под знаком корня (радикала). Область допустимых значений иррационального уравнения состоит из тех значений неизвестного, при которых неотрицательны все выражения, стоящие под знаком радикалов четной степени.

Как правило, саму ОДЗ не находят, а после получения корней производят проверку.

Если функция $y=f(x)$ определена и неотрицательна на множестве M, то на M справедливо тождество
$$(\sqrt{f(x)})^2=f(x).$$
Очень часто замена функции $y=(\sqrt{f(x)})^2$ на функцию $y=f(x)$ выполняется без учета области, где $f(x)$ неотрицательна, что приводит к ошибкам (посторонние корни).

Решая уравнения, содержащие радикалы, следует быть внимательным при замене функций $\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)}$ на $\sqrt{f(x)g(x)}$ и $\frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}}$ на $\sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}$ соответственно, а также при обратных заменах. Область существования функций $y=\sqrt{f(x)g(x)}$ и $y=\sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}$ может быть шире областей существования функций $y=\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)}$ и $y=\frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}}$, поэтому, например, функции $y=\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)}$ и $y=\sqrt{f(x)g(x)}$ могут не быть тождественно равными.

Одним из основных методов решения иррационального уравнения является метод возведения в степень (избавление от иррациональности). При этом можно получить посторонние корни.

Этот метод часто сочетается с методом замены переменной.

Решение уравнений, содержащих неизвестное под знаком модуля

Нужно четко представлять, что в области существования функции $y=f(x)$:

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x), & \text{для тех значений } x, \text{ при которых } f(x)\geqslant 0,\\ -f(x), & \text{для тех значений } x, \text{ при которых } f(x)<0.\end{cases}$$

При решении уравнений, содержащих функцию $|f(x)|$, обычно ОДЗ разбивают на две части M_1 и M_2. В первой из них выполняется неравенство $f(x) \geqslant 0$, а во второй $f(x) < 0$. Затем решают заданное уравнение отдельно в области M_1, пользуясь тождеством $|f(x)| = f(x)$, а затем в области M_2, где справедливо $|f(x)| = -f(x)$. Объединяя множества решений из M_1 и M_2, получают множество решений исходного уравнения.

Может случиться так, что в уравнение входят несколько функций под знаком модуля. Тогда ОДЗ разбивают на большее количество областей, в каждой из которых все функции, входящие в заданное уравнение под знаком модуля, принимают или только неотрицательные, или только неположительные значения. Затем в каждой из выделенных областей решают заданное уравнение, пользуясь указанным выше тождеством, и, объединяя множества решений, полученных в каждой области, находят множество решений исходного уравнения.

Системы уравнений

Несколько уравнений от нескольких неизвестных, рассматриваемых совместно, называют *системой уравнений. Решением системы* называется упорядоченный набор значений неизвестных, обращающий все уравнения системы в тождества.

Решить систему — это значит найти все решения системы или доказать, что система не имеет решений.

Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется *совместной.* Если система не имеет решений, то она называется *несовместной.*

Система называется *определенной*, если она имеет единственное решение. Система называется *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

При решении систем уравнений часто используются следующие преобразования системы, приводящие ее к системе уравнений, эквивалентной исходной.

1. Если обе части какого-либо уравнения системы домножить на одно и то же число (не равное 0), то полученная система будет эквивалентна первоначальной.

2. Если обе части какого-либо уравнения системы, умноженные на некоторое число, вычесть из соответствующих частей другого уравнения системы, то полученная система будет эквивалентна первоначальной.

Одним из основных методов решения систем уравнений является *метод исключения.* Из одного уравнения выражается одно из неизвестных и подставляется в оставшиеся уравнения. Получаем систему, состоящую из меньшего числа уравнений от меньшего числа неизвестных.

Решить систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ly = m \end{cases}$$

геометрически означает найти точку пересечения прямых $ax + by = c$ и $dx + ly = m$.

Исследовать эту систему достаточно легко.

Если коэффициенты при неизвестных величинах не пропорциональны $\left(\dfrac{a}{d} \neq \dfrac{b}{l}\right)$, то система имеет единственное решение (прямые пересекаются).

Если коэффициенты при x и y пропорциональны $\left(\frac{a}{d}=\frac{b}{l}\right)$, но они не пропорциональны свободным членам $\left(\frac{a}{d}\neq\frac{c}{m}\right)$, то система не имеет решений (прямые параллельны).

Если пропорциональны коэффициенты при x и y и свободные члены $\left(\frac{a}{d}=\frac{b}{l}=\frac{c}{m}\right)$, то система имеет бесконечно много решений (прямые совпадают).

4.2. Примеры

Пример 1. Решить уравнение

$$(\sqrt{x^2-7x+10})^2=2x^2-9x+7.$$

Решение. ОДЗ этого уравнения состоит из всех чисел, удовлетворяющих неравенству $x^2-7x+10\geqslant 0$, т. е. является объединением двух промежутков $x\leqslant 2$ и $x\geqslant 5$. Обозначим ОДЗ через M. На множестве M справедливо тождество $(\sqrt{x^2-7x+10})^2=$ $=x^2-7x+10$. Поэтому исходное уравнение равносильно на множестве M уравнению $x^2-7x+10=2x^2-9x+7$ или уравнению $x^2-2x-3=0$. Последнее уравнение имеет два корня $x_1=-1$ и $x_2=3$. Из них множеству M принадлежит только $x_1=-1$.

Ответ: $x_1=-1$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{x-1}\sqrt{x+2}=\sqrt{(x-1)(x+2)}+(x+5)(x-3). \tag{1}$$

Решение. ОДЗ уравнения (1) есть множество всех $x\geqslant 1$. На этой области выполняется тождество

$$\sqrt{x-1}\sqrt{x+2}\equiv\sqrt{(x-1)(x+2)},$$

так что уравнение (1) на множестве $x\geqslant 1$ равносильно уравнению

$$\sqrt{(x-1)(x+2)}=\sqrt{(x-1)(x+2)}+(x+5)(x-3)$$

и, значит, уравнению

$$(x+5)(x-3)=0.$$

Получившееся уравнение имеет два корня $x_2=-5$ и $x_1=3$, из которых в множество $x\geqslant 1$ попадает только $x_1=3$. Следовательно, исходное уравнение имеет только один корень $x_1=3$.

Ответ: $x_1=3$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt{x-2}=\sqrt{2x-1}.$$

Решение. ОДЗ уравнения состоит из чисел x, удовлетворяющих неравенствам $x-2\geqslant 0$ и $2x-1\geqslant 0$, т. е. имеет вид $x\geqslant 2$. На ОДЗ обе части уравнения определены и неотрицательны, поэтому оно равносильно на ОДЗ уравнению

$$(\sqrt{x-2})^2=(\sqrt{2x-1})^2,$$

т. е. уравнению

$$x-2=2x-1.$$

Это уравнение имеет единственный корень $x_1=-1$, не принадлежащий ОДЗ исходного уравнения. Значит исходное уравнение решений не имеет.

Ответ: решений нет.

Пример 4. Решить уравнение

$$|2x-3|=x+2.$$

Решение. Точка $x=3/2$ разбивает числовую ось на два промежутка: 1) $x<3/2$ и 2) $x\geqslant 3/2$. Решим исходное уравнение на каждом из этих промежутков.

1) На промежутке $3/2\leqslant x<+\infty$ выражение $2x-3$ положительно, поэтому на данном промежутке исходное уравнение равносильно уравнению

$$2x-3=x+2,$$

имеющему единственный корень $x_1=5$. Поскольку это значение x_1 принадлежит рассматриваемому промежутку, то $x_1=5$ является решением исходного уравнения на промежутке $3/2\leqslant x<+\infty$.

2) На промежутке $-\infty<x<3/2$ выражение $2x-3$ отрицательно, поэтому $|2x-3|=-(2x-3)$ и исходное уравнение на данном промежутке равносильно уравнению $-(2x-3)=x+2$, т. е. уравнению $-3x=-1$, имеющему единственный корень $x_2=1/3$. Этот корень принадлежит промежутку $-\infty<x<3/2$. Значит, на данном промежутке исходное уравнение имеет единственный корень $x_2=1/3$.

Ответ: $x_1=1/3, x_2=5$.

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 3x+2y=7. \end{cases}$$

(Эквивалентная формулировка: найти точку пересечения прямых $2x+3y=8$ и $3x+2y=7$.)

Решение. Из первого уравнения выражаем $x=\dfrac{8-3y}{2}$. Подставляем полученное выражение во второе уравнение. Система примет вид

$$\begin{cases} x=\dfrac{8-3y}{2} \\ 3\cdot\dfrac{8-3y}{2}+2y=7. \end{cases}$$

Из второго уравнения найдем $y=2$, подставляя это значение y в первое уравнение, получим $x=1$.

Ответ: (1; 2).

Пример 6. При каких значениях a и b система уравнений

$$\begin{cases} 5x+4y=1 \\ 3x+2ay=b \end{cases}$$

а) не имеет решений? б) имеет бесконечно много решений?

Решение. Условие пропорциональности коэффициентов при неизвестных имеет вид
$$\frac{5}{3}=\frac{4}{2a},$$
откуда $a=\dfrac{6}{5}$.

а) Если
$$\frac{5}{3}=\frac{4}{2a}\neq\frac{1}{b},$$
то система не имеет решений. Отсюда $b\neq\dfrac{3}{5}$.

б) Если
$$\frac{5}{3}=\frac{4}{2a}=\frac{1}{b},$$
то система имеет бесконечно много решений. Отсюда $b=\dfrac{3}{5}$.

Ответ: а) $a=\dfrac{6}{5}$ и $b\neq\dfrac{3}{5}$ б) $a=\dfrac{6}{5}$ и $b=\dfrac{3}{5}$.

Пример 7. При каких значениях a точка пересечения прямых $3x+10y=3$ и $3x+5ay=5$ имеет положительную ординату?

Решение. Решим систему уравнений
$$\begin{cases}3x+10y=3\\3x+5ay=5.\end{cases}$$
Из первого уравнения найдем $x=\dfrac{3-10y}{3}$ и, подставив во второе, получим
$$\begin{cases}x=\dfrac{3-10y}{3}\\3\cdot\dfrac{3-10y}{3}+5ay=5.\end{cases}$$
Второе уравнение после преобразований примет вид $(5a-10)y=2$. При $5a-10\neq0$ найдем $y=\dfrac{2}{5a-10}$. Для ответа на вопрос задачи достаточно решить относительно a неравенство $\dfrac{2}{5a-10}>0$, что равносильно $5a-10>0$.

Ответ: $a>2$.

Пример 8. Решить систему уравнений
$$\begin{cases}x^2-5xy+6y^2=0,\\x^2+y^2=10.\end{cases}$$

Решение. Разделим первое уравнение на y^2, получаем относительно неизвестного $t=x/y$ квадратное уравнение
$$t^2-5t+6=0.$$

Его корнями являются числа $t_1=2$, $t_2=3$. Возвращаясь к исходным неизвестным, получаем такие линейные зависимости между x и y:

$$x=2y, \quad x=3y.$$

Подставляя последовательно $x=2y$ и $x=3y$ во второе уравнение системы, получаем для неизвестного y квадратные уравнения $y^2=2$ и $y^2=1$. Решая их, находим затем и значения неизвестного x.

Ответ: Пары чисел $(3,1)$, $(-3,-1)$, $(2\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

Пример 9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[4]{1+5x}+\sqrt[4]{5-y}=3,\\ 5x-y=11.\end{cases}$$

Решение. Обозначая $\sqrt[4]{1+5x}=u$, $\sqrt[4]{5-y}=v$, получаем систему

$$\begin{cases}u+v=3,\\ u^4+v^4=17,\end{cases}$$

решения которой $u=1, v=2$ и $u=2, v=1$. (Эту систему можно решить, вводя неизвестные $t=u+v$ и $s=uv$.) Возвращаясь к исходным неизвестным, получаем системы линейных уравнений

$$\begin{cases}1+5x=16,\\ 5-y=1,\end{cases} \qquad \begin{cases}1+5x=1,\\ 5-y=16.\end{cases}$$

Решение первой системы $x=3$, $y=4$. Решение второй системы $x=0$, $y=-11$.

Ответ: $(3,4)$, $(0,-11)$.

Пример 10. При каких значениях параметра p уравнение $(x-4)\cdot|x-p|=4$ имеет три корня?

Решение. Уравнение имеет три корня, если графики функций $y=(x-4)\cdot|x-p|$ и $y=4$ имеют три общих точки. По определению модуля,

$$(x-4)\cdot|x-p|=\begin{cases}\ \ (x-4)(x-p), & x\geqslant p,\\ -(x-4)(x-p), & x<p.\end{cases}$$

Рассмотрим три случая.

1. Пусть $p>4$. Построим схематично графики функций (рис. 2а). Уравнение имеет три корня, если значение функции $y=(x-4)|x-p|$ в точке x_0 больше 4.

$$x_0=\frac{p+4}{2}=\frac{p}{2}+2, \quad y(x_0)=-\left(\frac{p}{2}-2\right)\left(2-\frac{p}{2}\right)=\frac{(p-4)^2}{4}>4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}p>8,\\ p<0.\end{array}\right.$$

Получим $p>8$.

2. Пусть $p<4$, тогда по графику определяем (рис. 2б), что прямая $x=4$ пересекает график функции $y=(x-4)|x-p|$ в одной точке.

3. Пусть $p=4$, тогда прямая $x=4$ пересекает график функции $y=(x-4)|x-p|$ в одной точке (рис. 2в).

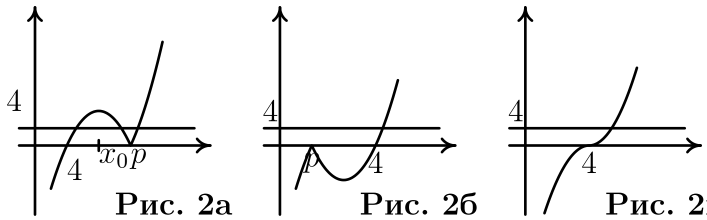

Рис. 2а **Рис. 2б** **Рис. 2в**

Ответ: $p>8$.

4.3. Аудиторные задачи

Решить иррациональные уравнения:

1. $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+3}=0$.

2. $x-\sqrt{x+1}=1$.

3. $(x^2-9)\sqrt{2-x}=0$.

4. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-2=0$.

5. $\sqrt{x-2}=\dfrac{x}{3}$.

6. $\sqrt{x^2+5x+1}+1=2x$.

7. $\sqrt{16-\sqrt{x+1}}=4$.

8. $\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}=3$.

9. $\sqrt{x}-\sqrt{x+3}=1$.

10. $\sqrt{9-5x}=\sqrt{3-x}+\dfrac{6}{\sqrt{3-x}}$.

11. $\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x^2+3}=\sqrt{6x^2+10}$.

12. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-2}=2\sqrt{x+1}$.

13. $\dfrac{\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+2}}=\dfrac{3\sqrt{x-1}}{\sqrt{3x-2}}$.

14. $\sqrt{8x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{7x+4}+\sqrt{2x-2}$.

15. $\sqrt{x+2}=\dfrac{3}{\sqrt{2x-3}}-\sqrt{2x-3}$.

16. $\sqrt{\sqrt{11x^2+1}-2x}=1-x$.

17. $\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{4-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}$.

18. $\sqrt[3]{x+44}-\sqrt[3]{x-19}=3$.

19. При каком значении a уравнение $\sqrt{4|x|-x^2}=a$ имеет ровно 4 корня?

20. Найти сумму корней уравнения

$$(x^2-4)\sqrt{18-2x^2}+2x\sqrt{x^2-5x+6}=5(x-3)\sqrt{x-2}.$$

21. Найти разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2+\sqrt{x^2}=\dfrac{1}{4}$.

Решить уравнения с модулем:

22. $|x+4|=2x$.

23. $|x|=|2x-5|$.

24. $|2x+1|=x$.

25. $\dfrac{|x+1|}{|x-1|}=1.$
26. $|3x+1|+x=9.$
27. $|x+5|-|x-3|=8.$
28. $|x-3|+2|x+1|=4.$
29. $|5-2x|+|x+3|=2-3x.$
30. $|x^2+x|+3x-5=0.$
31. $|x-6|=|x^2-5x+9|.$
32. $\dfrac{5}{3-|x-1|}=|x|+2.$
33. $|x-4,2|(x-4,2)=-1.$
34. $x^{\frac{2}{3}}+4|x|^{\frac{1}{3}}-5=0.$
35. $|2|x|-6|=-4-x.$
36. Найти сумму корней уравнения $|\sqrt{x+9}-7|=3.$
37. При каком a уравнение $|x-11|+|x+1|=a$ имеет только два корня?
38. При каких значениях a уравнение $|x^2-2ax|=1$ имеет три различных корня?
39. При каких b уравнение $|x-2|-x-b=3$ имеет единственное решение?

Решить уравнения:

40. $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4.$
41. $|2-|1-|x|||=1.$
42. $\left|\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}\right|+\left|\frac{1}{2}x^2-3x+4\right|=\frac{3}{4}.$
43. Найти сумму корней уравнения

$$x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12}.$$

Решить уравнения:

44. $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}-\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}=1.$
45. $\sqrt[3]{x+1}=\sqrt{x-3}.$
46. Найти a, при которых уравнение

$$(3x-a)\sqrt{2x-6}=0$$

имеет ровно один корень.

47. При каждом значении параметра a решить уравнение

$$2|x|+|a|=x+1.$$

48. Для каждого значения параметра a определить число решений уравнения

$$|x^2-2x-3|=a.$$

49. Решить уравнение

$$|x+3|-a|x-1|=4$$

и найти, при каких значениях a оно имеет два решения?

50. Вычислить $\dfrac{2x_0}{x_0-5}$, где x_0 — корень уравнения

$$\sqrt[3]{5+x}-2\sqrt[3]{5-x}=\sqrt[6]{25-x^2}.$$

Решить системы линейных уравнений:

51. $\begin{cases} 3x+5y=21, \\ 2x-y=1. \end{cases}$

52. $\begin{cases} 2x-3y=-1, \\ \dfrac{y}{x}=0,75. \end{cases}$

53. $\begin{cases} 3x+2y=5, \\ \dfrac{5}{3-2x}=\dfrac{2,5}{1-y}. \end{cases}$

54. $\begin{cases} \dfrac{x+y+4}{5}+\dfrac{x-y-4}{7}=9, \\ \dfrac{x+y+4}{5}-\dfrac{x-y-4}{7}=1. \end{cases}$

При каких значениях параметра a системы не имеют решений:

55. $\begin{cases} x+ay=1, \\ x-3ay=2a+3. \end{cases}$

56. $\begin{cases} 16x+ay=4, \\ ax+9y-3=0. \end{cases}$

57. $\begin{cases} x+ay=1, \\ ax+y=2a. \end{cases}$

При каких a системы имеют бесконечно много корней:

58. $\begin{cases} (a+1)x+8y=4a, \\ ax+(a+3)y=3a-1. \end{cases}$

59. $\begin{cases} 3x+ay=3, \\ ax+3y=3. \end{cases}$

60. $\begin{cases} 2x+ay=a-6, \\ 2|x+1|=2y+2 \end{cases}$

61. $\begin{cases} 3ax+16y=-64, \\ x+3ay=9a^2 \end{cases}$

Решить системы уравнений:

62. $\begin{cases} 2x+y-z=6, \\ 3x-y+2z=5, \\ 4x+2y-5z=9. \end{cases}$

63. $\begin{cases} 2x+y+3z=13, \\ x+y+z=6, \\ 3x+y+z=8. \end{cases}$

64. Найти значение $3x_0-y_0$, если (x_0, y_0) решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-3y}+\dfrac{2}{5x+y}=-\dfrac{1}{6}, \\ \dfrac{3}{5x+y}-\dfrac{3}{x-3y}=2. \end{cases}$$

65. Найти значение параметра k, при котором прямая $y=kx-2$ проходит через точку пересечения прямых $2x+y-5=0$ и $3x-2y+3=0$.

66. Найти значения параметра a, при которых $x \cdot y > 0$, если (x, y) — решение системы

$$\begin{cases} 3x - y = 2 - a, \\ x + 2y = a + 1. \end{cases}$$

Среди решений (x, y) системы найти то, для которого сумма $(x+y)$ максимальна. Вычислить значение этой суммы:

67. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{13}{36}. \end{cases}$

68. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 3. \end{cases}$

69. $\begin{cases} |x| + y = 5, \\ |x| \cdot y = 4. \end{cases}$

70. $\begin{cases} x + y + xy = 11, \\ x + y - xy = 1. \end{cases}$

71. $\begin{cases} x^2 y^3 = 8, \\ x^3 y^2 = 4. \end{cases}$

72. $\begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 13. \end{cases}$

Решить системы уравнений:

73. $\begin{cases} x + y + 2xy = 7, \\ xy + 2(x + y) = 8. \end{cases}$

74. $\begin{cases} y^2 - xy = 12, \\ x^2 - xy = -3. \end{cases}$

Среди решений (x, y) системы найти то, для которого сумма $(x+y)$ максимальна. Вычислить значение этой суммы:

75. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ \sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} = -1. \end{cases}$

76. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2, \\ x - 2y + 1 = 0. \end{cases}$

77. $\begin{cases} \sqrt{2x + y + 2} = 3, \\ \sqrt{x + 2y + 5} = y - x. \end{cases}$

78. При каких k система

$$\begin{cases} |x + 3| + |y| = 1, \\ y - kx = 1 \end{cases}$$

не имеет решений?

79. При каких a система

$$\begin{cases} |y| - x = 1, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

80. При каких k выполняются неравенства $x_0 < 0$, $y_0 > 0$, где (x_0, y_0) решение системы уравнений

$$\begin{cases} x-ky=3, \\ kx+3y=4. \end{cases}$$

Решить системы уравнений:

81. $\begin{cases} \sqrt[4]{1+5x}+\sqrt[4]{5-y}=3, \\ 5x-y=11. \end{cases}$

82. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{5}, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

83. $\begin{cases} x+y+z=4, \\ 2xy-z^2=16. \end{cases}$

84. $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2}, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4. \end{cases}$

4.4. Домашнее задание

Решить иррациональные уравнения:

1. $\dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}}=\dfrac{2-x}{2+x}$.

2. $\sqrt{\dfrac{10+x}{x}}+\sqrt{\dfrac{10-x}{x}}=\sqrt{6}$.

3. $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}=x+2$.

4. $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}-\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=56$.

5. $\sqrt{x-4}-\sqrt{x-9}=2$.

6. $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x-3}=\sqrt[3]{2x-5}$.

7. $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$.

8. $\sqrt{7-x}-\dfrac{10}{\sqrt{7-x}}=-3$.

9. $3+\sqrt[3]{1-\sqrt{x+2}}=2$.

Решить уравнения с модулем:

10. $|x-2|-|5+x|=3$.

11. $x^2+|x-2|-10=0$.

12. $|x+2|=2x-8$.

13. $|x+2|=\dfrac{2}{3-x}$.

14. $|x^2+4x+2|=\dfrac{5x+16}{3}$.

15. $|x^2-4|x||=5$.

16. Найти сумму корней уравнения $|(x-5)^3-76|=49$.

17. Найти разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2+|x|=\dfrac{7}{4}$.

18. При каких a уравнение $\sqrt{24|x|-4x^2}=a$ имеет ровно 3 корня?
19. Найти произведение корней уравнения

$$(x-2)\sqrt{9-x^2}+2\sqrt{x^2-5x+6}=(x^2-9)\sqrt{x-2}.$$

20. Найти a, при которых уравнение

$$(2x-4a)\sqrt{x^2+2x-8}=0$$

имеет ровно два корня.
21. При каких a уравнение $|x-10|+|x+2|=a$ имеет бесконечно много корней?

Решить уравнения:
22. $|x^2-1|=-|x|+1$.
23. $\sqrt{x^2+2\sqrt{x^2-1}}-\sqrt{x^2-2\sqrt{x^2-1}}=1$.
24. Для каждого значения параметра a решить уравнение

$$x^2+|x|+a=0.$$

При каких значениях параметра a системы не имеют решений:

25. $\begin{cases} -4x+ay=1+a, \\ (6+a)x+2y=3+a. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 16x+ay=4, \\ ax+9y-3=0. \end{cases}$

При каких a системы имеют бесконечно много корней:

27. $\begin{cases} ax-(a+1)y=6, \\ 7ax-28y=6(a+4). \end{cases}$

28. $\begin{cases} x+ay=1, \\ ax-3ay=2a+3. \end{cases}$

29. Найти значение параметра b, при котором прямая $y=5x+b$ проходит через точку пересечения прямых $3x-y-3=0$ и $2x+3y-13=0$.
30. При каких значениях параметров a и b система уравнений

$$\begin{cases} 2x-ay=-1, \\ 4x+3y=b \end{cases}$$

имеет бесконечно много корней?

Решить системы уравнений:

31. $\begin{cases} 6x+2y-z=4, \\ 4x-y+3z=-4, \\ 3x+2y-2z=5. \end{cases}$

32. $\begin{cases} 2x+y+z=7, \\ x+2y+z=8, \\ x+y+2z=9. \end{cases}$

Среди решений (x,y) системы найти то, для которого сумма $(x+y)$ максимальна. Вычислить значение этой суммы:

33. $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ x^2y^2=9. \end{cases}$

34. $\begin{cases} \dfrac{x+3}{y-3}+\dfrac{y-3}{x+3}=\dfrac{17}{4}, \\ xy=4. \end{cases}$

35. $\begin{cases} x^3+y^3=65, \\ x^2y+xy^2=20. \end{cases}$

36. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=1, \\ xy=8. \end{cases}$

37. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=1, \\ x-y=7. \end{cases}$

Решить системы уравнений:

38. $\begin{cases} y^2+xy-z^2=4, \\ x+5y=8. \end{cases}$

39. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8, \\ x+y-\sqrt{x}+\sqrt{y}-2\sqrt{xy}=2. \end{cases}$

40. При каких k система уравнений

$$\begin{cases} x+ky=2k+1, \\ 2|x-1|=y-2 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

41. При каких a система уравнений

$$\begin{cases} |x|+|y|=1, \\ y=a-x \end{cases}$$

имеет больше двух решений?

4.5. Проверочный тест

1. Значение x^3+10x, где x — корень уравнения

$$\sqrt{6-x}-\sqrt{2x-3}=0,$$

равно

1) 57; 2) -57; 3) 75; 4) -72; 5) 72.

2. Дано уравнение $\sqrt{25x^2+9}-\sqrt{25x^2-7}=2$. Произведение его корней равно

1) $-\dfrac{16}{25}$; 2) $\dfrac{16}{25}$; 3) 16; 4) $\dfrac{25}{16}$; 5) $-\dfrac{25}{16}$.

3. Уравнение $|x+4|+|x-10|=a$ не имеет корней, если

1) $a>14$; 2) $0<a\leqslant 14$; 3) $a<14$; 4) $a=6$; 5) $a<5$.

4. Уравнение

$$\sqrt{6|x|-x^2}=a$$

имеет ровно два корня при a равном

1) 3; 2) 2; 3) 4; 4) 1; 5) 0.

5. Наибольшее значение выражения $2x+y$, где (x,y) — решения системы

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5, \\ x+y=35, \end{cases}$$

равно

1) 43; 2) 62; 3) 35; 4) 102; 5) 54.

6. Система уравнений

$$\begin{cases} ax-5y=-1, \\ 6x+15y=b+3 \end{cases}$$

не имеет решений при a и b равных

1) $a=2$, $b\neq 1$; 2) $a=2$, $b\neq 0$; 3) $a\neq 1$, $b=3$; 4) $a=-2$, $b\neq 1$; 5) $a=-2$, $b\neq 0$.

7. Точка пересечения прямых $x+y=1$ и $ax+2y=1$ имеет отрицательную абсциссу при a принадлежащих множеству

1) $(-\infty,2)$; 2) $\varnothing$; 3) $(2,+\infty)$; 4) $(3,+\infty)$, 5) $(-\infty,3)$.

8. Найти сумму $x+y+z$, где (x,y,z) — решение системы уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ 3x+2y+z=6, \\ x+y-z=1, \end{cases}.$$

9. Найти наибольшее значение $x+y$, где (x,y) — решения системы

$$\begin{cases} y^2-xy=12, \\ x^2-xy=-3, \end{cases}.$$

10. Найти сумму корней уравнения

$$(x^2-25)\sqrt{2x^2-6x+4}+x\sqrt{4-x^2}=(x^2-4)\sqrt{x-1}+\sqrt{3}(x-2).$$

4.6. Ответы

Аудиторные задачи:

1. 6; **2.** 3; **3.** 2, -3; **4.** 1; **5.** 3, 6; **6.** 3; **7.** -1; **8.** 6, 9; **9.** Нет решений; **10.** -3; **11.** -1, 1; **12.** 3; **13.** 2; **14.** 3; **15.** 2; **16.** -3, 0; **17.** 27; **18.** -45, 20; **19.** $0<a<2$; **20.** 5; **21.** $\sqrt{2}-1$; **22.** 4; **23.** 5, $\dfrac{5}{3}$; **24.** Нет решений; **25.** 0; **26.** -5, 2; **27.** $[3,+\infty)$; **28.** -1; **29.** $(-\infty,-3]$; **30.** -5, 1; **31.** 1, 3; **32.** 3, $-2+\sqrt{5}$; **33.** 3,2; **34.** ± 1; **35.** Нет решений; **36.** 98; **37.** $a>12$; **38.** $a=\pm 1$; **39.** $b>-5$; **40.** $x\in[1,2]\cup\{5\}$; **41.** -4, -2, 0, 2, 4; **42.** $1\dfrac{3}{4}$, $2\dfrac{1}{2}$, $3\dfrac{1}{4}$; **43.** 4; **44.** 2,25; **45.** 7; **46.** $a\leqslant 9$; **47.** При $|a|>1$ решений нет, при $|a|=1$ решение $x=0$, при $0\leqslant a<1$ решения $x=1-a$ и $x=\dfrac{a-1}{3}$, при $-1<a<0$ решения $x=1+a$ и $x=-\dfrac{a+1}{3}$. *Указание*: построить на плоскости (x,a) графики входящих в уравнения функций; **48.** При $a<0$ решений нет, при $a=0$ — два решения, при $0<a<4$ — четыре решения, при $a=4$ — три решения, при $a>4$ — два решения; **49.** При $a=1$ $x\geqslant 1$; при $a=-1$ $-3\leqslant x\leqslant 1$, при $|a|<1$ $x=1$, $x=\dfrac{7+a}{a-1}$, т. е. два решения; при $|a|>1$ $x=1$, т. е. одно решение; **50.** -63; **51.** (2, 3); **52.** (4, 3); **53.** (1,2; 0,7); **54.** (26,5; -5,5); **55.** $a=0$; **56.** $a=-12$; **57.** $a=\pm 1$; **58.** $a=1$; **59.** $a=3$; **60.** $a=2$; **61.** $-\dfrac{4}{3}$; **62.** (2, 3, 1); **63.** (1, 2, 3); **64.** 2; **65.** $k=5$; **66.** $a\in(-1/4;5)$; **67.** 5; **68.** 17; **69.** 5; **70.** 6; **71.** 3; **72.** 4; **73.** (2, 1), (1, 2); **74.** (1, 4), $(-1, -4)$; **75.** 9; **76.** 2; **77.** 6; **78.** $(-\infty,0)\cup(2/3,+\infty)$; **79.** $a>1$, $a=\dfrac{1}{2}$; **80.** $k<-\dfrac{9}{4}$; **81.** (3, 4), $(0, -11)$; **82.** $\left(\dfrac{120}{61}, \dfrac{120}{11}, \dfrac{120}{19}\right)$; **83.** $(4, 4, -4)$; **84.** (4, 4).

Домашнее задание:

1. 0, 2; **2.** 6; **3.** 0, 1; **4.** 1024; **5.** $9\frac{1}{16}$; **6.** 3; 2; 2,5; **7.** 1,25; **8.** -18, 3; **9.** 2; **10.** -3; **11.** 3, $\dfrac{1-\sqrt{33}}{2}$; **12.** 10; **13.** $\dfrac{1-\sqrt{33}}{2}$, $\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$; **14.** -2, 1; **15.** ± 5; **16.** 18; **17.** $2\sqrt{2}-1$; **18.** $a=0$; **19.** 6; **20.** $-2\leqslant a\leqslant 1$; **21.** $a=12$; **22.** $0, \pm 1$; **23.** $\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$; **24.** При $a<0$ $x=\pm\dfrac{1}{2}(-1+\sqrt{1-4a})$, при $a=0$ $x=0$, при $a>0$ решений нет; **25.** $a=-4$; **26.** $a=-12$; **27.** $a=3$; **28.** $a=-3$; **29.** $b=-7$; **30.** $a=-\dfrac{3}{2}$, $b=-2$; **31.** $(-1, 6, 2)$; **32.** (1, 2, 3); **33.** 4; **34.** $16\dfrac{1}{4}$; **35.** 5; **36.** 9; **37.** 9; **38.** (3, 1, 0); **39.** (25, 9) и (49/4, 81/4); **40.** $k=\pm\dfrac{1}{2}$; **41.** $a=\pm 1$.

5. Рациональные неравенства

Числовые неравенства, их свойства. Неравенства с одной переменной, равносильные преобразования неравенств. Решение квадратных неравенств, рациональных неравенств. Метод интервалов. Системы рациональных неравенств. Равносильные преобразования систем. Совокупность систем неравенств. Неравенства с параметром.

5.1. Справочный материал

Пусть даны две функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$. Выражения вида

$$f(x)>g(x), \quad f(x)<g(x), \quad f(x)\geqslant g(x), \quad f(x)\leqslant g(x)$$

называются *неравенствами с одним неизвестным.*

Областью допустимых значений (ОДЗ) неравенства $f(x)>g(x)$ ($f(x)<g(x)$, $f(x)\geqslant g(x)$, $f(x)\leqslant g(x)$) называется общая часть (пересечение) областей существования функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$, т. е. множество всех числовых значений неизвестного x, при каждом из которых имеют смысл (определены) левая и правая части неравенства.

Любое число x из ОДЗ неравенства называется *допустимым значением* для данного неравенства.

Число α из ОДЗ неравенства называется *решением* неравенства, если при подстановке его вместо неизвестного в неравенство оно превращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство — это значит найти множество *всех* его решений.

Нахождение ОДЗ позволяет в некоторых случаях доказать, что неравенство не имеет решений и часто дает возможность упрощать процесс решения неравенства.

Так, например, ОДЗ неравенства $\sqrt{x-8}+\sqrt{4-x}>\sqrt{x}$ есть пустое множество.

Решениями неравенства $\sqrt{x^2+5x+6}>-2$ являются все x из его ОДЗ.

Пусть даны два неравенства. Если любое решение первого неравенства является решением второго неравенства, а любое решение второго неравенства — решение первого, то такие неравенства называются *равносильными.*

Например, неравенства $x^2>0$ и $x^4>0$ равносильны, а неравенства $\sqrt{x}>1$ и $x^2>1$ равносильными не являются.

Пусть даны два неравенства и некоторое множество M. Если любое решение первого неравенства, принадлежащее множеству M, является решением второго неравенства, а любое решение второго неравенства, принадлежащее M — решение первого, то такие два неравенства называются *равносильными на множестве* M.

Например, неравенства

$$x+1+\frac{1}{x}\geqslant x+\frac{1}{x} \quad \text{и} \quad x+1\geqslant x$$

не являются равносильными на множестве всех действительных чисел, но равносильны, например, на промежутке $-\infty<x<0$.

Утверждения о равносильности неравенств:

1. Неравенства $f(x)>g(x)$ и $f(x)-g(x)>0$ равносильны.

2. Неравенства $f(x)>g(x)$ и $f(x)+\alpha>g(x)+\alpha$ равносильны для любого числа α.

3. Неравенства $f(x)>g(x)$ и $\alpha f(x)>\alpha g(x)$ равносильны для любого положительного числа α.

4. Неравенства $f(x)>g(x)$ и $\alpha f(x)<\alpha g(x)$ равносильны для любого отрицательного числа α.

5. Если функции $y=\varphi(x)$ и $y=g(x)$ тождественно равны, то неравенства $f(x)>g(x)$ и $f(x)>\varphi(x)$ равносильны.

6. Пусть n — натуральное число и на некотором множестве M функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ неотрицательны. Тогда на этом множестве неравенства $f(x)>g(x)$ и $(f(x))^n>(g(x))^n$ равносильны.

7. Пусть на множестве M, содержащемся в ОДЗ неравенства $f(x)>g(x)$, функция $y=\varphi(x)$ положительна. Тогда на этом множестве равносильны неравенства

$$f(x)>g(x) \quad \text{и} \quad f(x)\varphi(x)>g(x)\varphi(x).$$

8. Пусть на множестве M, содержащемся в ОДЗ неравенства $f(x)>g(x)$, функция $y=\varphi(x)$ отрицательна. Тогда на этом множестве равносильны неравенства

$$f(x)>g(x) \quad \text{и} \quad f(x)\varphi(x)<g(x)\varphi(x).$$

9. Если функции $y=\varphi(x)$ и $y=g(x)$ тождественно равны на множестве M, то неравенства $f(x)+\varphi(x)>0$ и $f(x)+g(x)>0$ равносильны на множестве M.

Рассмотрим m неравенств $f_1(x)>g_1(x),\ldots,f_m(x)>g_m(x)$. Обозначим через Q область, являющуюся пересечением областей допустимых значений этих неравенств.

Если нужно найти все числа α из области Q, каждое из которых — решение каждого из этих неравенств, то говорят, что дана *система* m неравенств

$$\begin{cases} f_1(x)>g_1(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x)>g_m(x), \end{cases}$$

и область Q называют *областью допустимых значений (ОДЗ)* этой системы. Число α из ОДЗ системы называется *решением* данной системы, если оно является решением каждого из неравенств системы. Решить систему неравенств — значит найти множество *всех* ее решений. Если это множество окажется пустым, то говорят, что система неравенств не имеет решений.

Систему неравенств обычно решают следующим образом: сначала решают каждое неравенство на ОДЗ этой системы, затем находят множество, являющееся пересечением всех этих множеств решений.

Говорят, что неравенство $f(x)>g(x)$ *равносильно совокупности систем неравенств,* если множество его решений совпадает с множеством решений данной совокупности.

Замена неравенства $f(x)>g(x)$ равносильной ему совокупностью систем неравенств называется равносильным переходом от неравенства к совокупности систем неравенств.

Рациональные неравенства

Рациональные неравенства это неравенства вида $P_n(x)>0$ $(P_n(x)<0)$, $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}>0$ $\left(\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}<0\right)$, где $P_n(x)$; $Q_m(x)$ — многочлены соответственно степеней n и m, т. е.

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,$$
$$Q_m(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0.$$

Отметим, что неравенство $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}>0$ $\left(\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}<0\right)$ равносильно неравенству $P_n(x)\cdot Q_m(x)>0$ $(P_n(x)Q_m(x)<0)$.

Метод интервалов

Рассмотрим неравенство

$$P_n(x)>0.$$

Разложим многочлен $P_n(x)$ на множители:

$$P_n(x)=(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_l)^{k_l}Q(x),$$

где k_1, k_2,...,k_l — некоторые натуральные числа, а x_1, x_2,..., x_l — различные корни уравнения $P_n(x)=0$, а многочлен $Q(x)$ не имеет действительных корней. Тогда этот многочлен либо положителен на всей числовой прямой, либо отрицателен на всей числовой прямой. Положим (для определенности) $Q(x)>0$. Тогда в рассматриваемом неравенстве на него можно сократить. Будем считать также, что

$$x_1<x_2<\ldots<x_l.$$

Итак нужно решить неравенство

$$P_n(x)=(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_l)^{k_l}>0. \tag{1}$$

При $x>x_l$ все сомножители положительны, поэтому и $P_n(x)>0$. Если число k_l — нечетное, то при $x\in(x_{l-1},x_l)$ все сомножители в (1) положительны, за исключением последнего, который отрицателен и поэтому на данном промежутке $P_n(x)<0$. В этом случае говорят, многочлен $P_n(x)$ *меняет знак* при переходе через корень x_l. Если же k_l — четное, то все сомножители в (1) на промежутке (x_{l-1},x_l) остаются положительными. Следовательно, $P_n(x)>0$ при $x\in(x_{l-1},x_l)$. В этом случае говорят, что многочлен $P_n(x)$ *не меняет знака* при переходе через корень x_l.

Аналогично рассматриваются все остальные корни. Таким образом на каждом из интервалов (на которые разбивается числовая ось точками $x_1,\ldots,x_l$) многочлен $P_n(x)$ сохраняет определенный знак. И таким образом, решением неравенства (1) служит объединение тех интервалов из этого разбиения, на котором многочлен $P_n(x)$ — положителен.

Итак для нахождения решения неравенства $P_n(x)>0$ нужно знать все действительные корни многочлена $x_1,\ldots,x_l$ и степени $k_1,\ldots,k_l$.

Аналогично решается неравенство $P_n(x)<0$.

Множеством решений нестрогого неравенства

$$P_n(x)\geqslant 0 \quad (P_n(x)\leqslant 0)$$

является объединение двух множеств: множества решений строгого неравенства $P_n(x)>0$ $(P_n(x)<0)$ и множества решений уравнения $P_n(x)=0$.

При решении рационального нестрогого неравенства нужно обязательно учитывать ОДЗ. То есть корни знаменателя мы должны исключить из рассмотрения как при решении строгого неравенства, так и при решении нестрогого неравенства. Следовательно, неравенства $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}\geqslant 0$ и $P_n(x)\cdot Q_m(x)\geqslant 0$ неравносильны.

5.2. Примеры

Пример 1. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2\leqslant 9,\\ x>0.\end{cases}$$

Решение. Решаем сначала первое неравенство $x^2\leqslant 9$:

$$x^2-9\leqslant 0, \qquad (x-3)(x+3)\leqslant 0.$$

Его решение: $-3\leqslant x\leqslant 3$ (рис. 3).

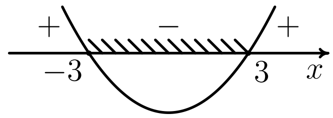

Рис. 3

Решение второго неравенства очевидно.

Изобразим на числовой прямой множество чисел, удовлетворяющих первому и второму неравенствам (рис. 4), откуда следует, что оба неравенства верны при $0 < x \leqslant 3$.

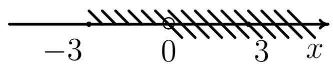

Рис. 4

Ответ: $x \in (0, 3]$.

Пример 2. Решить двойное неравенство

$$-1 < x^2 + x < 0.$$

Решение. Решить двойное неравенство — это значит решить соответствующую систему неравенств

$$\begin{cases} -1 < x^2 + x, \\ x^2 + x < 0. \end{cases}$$

1) Решим первое неравенство $-x^2 - x - 1 < 0$. Многочлен, стоящий в левой части неравенства, нельзя разложить на множители, так как уравнение $-x^2 - x - 1 = 0$ не имеет корней ($D = -3 < 0$). Поэтому квадратный трехчлен $(-x^2 - x - 1)$ при всех значениях x имеет постоянный знак, а именно отрицательный (по знаку первого коэффициента). Таким образом, решение этого квадратного неравенства есть промежуток $(-\infty, +\infty)$.

2) Решим второе неравенство $x(x+1) < 0$ (рис. 5), его решение интервал $x(-1, 0)$.

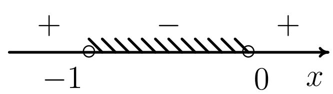

Рис. 5

3) Найдем пересечение полученных множеств.

Ответ: $(-1, 0)$.

Пример 3. Решить неравенство $\dfrac{(x-2)^2(x-3)}{x+1} \geqslant 0$.

Решение. Находим точки, в которых обращается в нуль числитель и знаменатель: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Так как неравенство нестрогое, то $x_2 = 2$ и $x_3 = 3$ — являются решениями неравенства. На числовой прямой отметим точки $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, причем x_2 и x_3 обычно изображают как жирную точку $\bullet$, а x_1 как "пустую"точку $\circ$ (рис. 6).

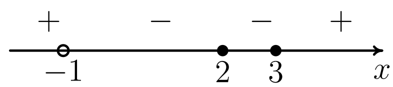

Рис. 6

Для определения знака выражения $\dfrac{(x-2)^2(x-3)}{x+1}$ в каждом из четырех интервалов достаточно взять по одной точке, лежащей внутри интервала, и вычислить значение выражения в этой точке. Так, например, $x=-2\in(-\infty;\ 1)$, $\dfrac{(-2-2)^2(-2-3)}{-2-1}=$ $=\dfrac{80}{3}>0$. Подобным образом определяем знаки выражения на остальных интервалах.

Ответ: $(-\infty;\ 1)\cup\{2\}\cup[3;\ +\infty)$.

Пример 4. Решить неравенство $\dfrac{3-5x}{5x+1}\leqslant -2$.

Решение. Преобразуем неравенство.

$$\frac{3-5x}{5x+1}+2\leqslant 0;\qquad \frac{3-5x+10x+2}{5x+1}\leqslant 0;\qquad \frac{5x+5}{5x+1}\leqslant 0.$$

Далее решаем методом интервалов $x_1=-1$, $x_2=-\dfrac{1}{5}$ (рис. 7).

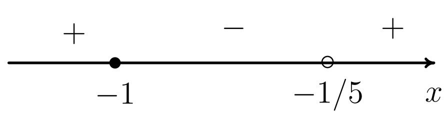

Рис. 7

Ответ: $[-1;\ -1/5)$.

Пример 5. Решить неравенство $\dfrac{x^3-27}{x^3+8}\leqslant 0$.

Решение. Разложим числитель и знаменатель дроби, стоящей в левой части неравенства, на множители:

$$\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x+2)(x^2-2x+4)}\leqslant 0.$$

Дискриминанты уравнений $x^2+3x+9=0$ и $x^2-2x+4=0$ отрицательны ($D_1=-27<0$ и $D_2=-12<0$); следовательно, они решений не имеют.

Отсутствие решений означает, что квадратные трехчлены на множители не раскладываются и на всем промежутке изменения x имеют постоянный знак, совпадающий со знаком старшего члена (в нашем случае "+").

Умножим и разделим исходное неравенство на положительные выражения (x^2-2x+4) и (x^2+3x+9) соответственно. Получим равносильное неравенство $\dfrac{x-3}{x+2}\leqslant 0$, которое решаем методом интервалов.

Отметим на координатной прямой точки, в которых левая часть неравенства обращается в нуль. Получим три промежутка (рис. 8).

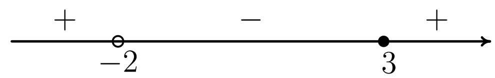

Рис. 8

Объединяя промежуток $(-2;\,3)$ и точку $x=3$, получим $-2<x\leqslant 3$.

Ответ: $(-2;\,3]$.

Пример 6. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых наименьшее из двух чисел $b=3-a^3(5a^{-1}+a)$ и $c=a^{-4}+a^{-1}(3a-5a^{-1})$ не меньше -3.

Решение. Из условия задания следует, что оба данных числа должны быть не меньше -3, получим систему неравенств

$$\begin{cases} 3-a^3(5a^{-1}+a)\geqslant -3, \\ a^{-4}+a^{-1}(3a-5a^{-1})\geqslant -3. \end{cases}$$

1. Решим первое неравенство:

$$3-5a^2-a^4+3\geqslant 0 \Rightarrow a^4+5a^2-6\leqslant 0, \quad (a^2+6)(a^2-1)\leqslant 0.$$

Первый множитель положителен, поэтому получим $a^2\leqslant 1$. По условию задачи $a>0$, поэтому решением первого неравенства является множество $(0;1]$.

2. Решим второе неравенство:

$$a^{-4}+3-5a^{-2}+3\geqslant 0 \Rightarrow a^{-4}-5a^{-2}+6\geqslant 0, \quad \frac{6a^4-5a^2+1}{a^2}\geqslant 0.$$

Так как знаменатель больше нуля, далее рассматриваем только числитель

$$6\left(a^2-\frac{1}{2}\right)\left(a^2-\frac{1}{3}\right)\geqslant 0,$$
$$6\left(a-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(a+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(a-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(a+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\geqslant 0.$$

Так как $a>0$, получим неравенство

$$\left(a-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(a-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\geqslant 0,$$

отсюда $a\in\left(0;\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$. Найдем пересечение полученных множеств.

Ответ: $a\in\left(0;\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{2}};1\right]$.

Пример 7. Вычислить площадь фигуры на плоскости $X0Y$, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} 5x-3y\geqslant 25 \\ 5x+3y\leqslant 55 \\ y\geqslant 0. \end{cases}$$

Решение. Изобразим фигуру, для этого построим прямые $5x-3y=25$ и $5x+3y=55$. Первая прямая проходит через точки $(5,0)$ и $(8,5)$, а вторая — через точки $(8,5)$ и $(11,0)$ (рис. 9). Преобразуя неравенства, получим: $y\leqslant\frac{1}{3}(5x-25)$, $y\leqslant\frac{1}{3}(55-5x)$. Следовательно, требуемая фигура расположена ниже построенных прямых и выше оси абсцисс, так как $y\geqslant 0$. Найдем площадь треугольника: $S=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5=15$.

Ответ: 15.

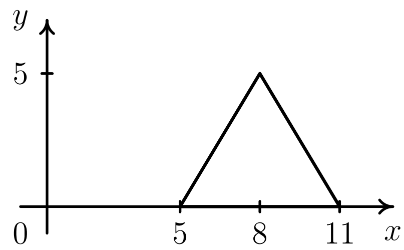

Рис. 9

5.3. Аудиторные задачи

Найти наибольшее целое решение неравенств:

1. $x+2\geqslant 2{,}5x-1$.

2. $\dfrac{2x-8}{3}-\dfrac{3x-5}{2}\geqslant 4$.

Найти наименьшие целые числа, являющиеся решениями неравенств:

3. $2(x-3)-1>3(x-2)-4(x+1)$.

4. $x^2+x<x(x+5)+5$.

Найти наибольшее целое решение неравенств:

5. $\dfrac{x-4}{x-2}\leqslant 0$.

6. $x^2(3-x)(x+1)>0$.

Найти наибольшие целые отрицательные решения неравенств:

7. $x^3-4x<0$.

8. $\dfrac{9}{x-9}<\dfrac{1}{x+8}\leqslant\dfrac{1}{9x}$.

Решить неравенства:

9. $(1-3x)^7(3-2x)^2(1+3x)^3(2-x)^5x^3(x+2)^4(x+3)^3>0$.

10. $\dfrac{x^3-27}{x^3+8}\leqslant 0$.

11. $\dfrac{2}{9-x^2}\geqslant 18$.

12. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}\leqslant 0$.

Найти наименьшие целые решения неравенств:

13. $\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^2-\dfrac{18x}{(x-3)^2(x+3)}\leqslant\dfrac{3}{x+3}$.

14. $\dfrac{2x^2+2x-11}{x^2+x+1}<1$.

Найти среднее арифметическое целых решений для каждого из неравенств:

15. $-\dfrac{3}{x} \leqslant -\dfrac{1}{2}$.

16. $\dfrac{x^3+10x^2+21x}{x^2+7x+12} \cdot \dfrac{1}{x+4} \leqslant 0$.

Найти число целых решений неравенств:

17. $\dfrac{x^2+11x+7}{(x^2-9)} \leqslant \dfrac{3}{x+3}$.

18. $\dfrac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} \geqslant \dfrac{1}{x^2-x-2}$.

19. Найти количество всех целых решений неравенства $\dfrac{12-x-x^2}{8x-2x^2-x^3} \geqslant 0$, принадлежащих промежутку $(-14, 3]$.

20. Найти число целых решений неравенства $\dfrac{x^2+10x+25}{(x+5)(x+3)} \geqslant -1$, принадлежащих отрезку $[-6, -2]$.

21. Найти число целых решений неравенства $\dfrac{(2-x)^2-8+4x}{(x-5)^5} \geqslant 0$ на промежутке $[-3, 7]$.

Решить системы неравенств:

22. $\begin{cases} 2x^2+9x \leqslant -7, \\ 2x+5 \leqslant 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x-4 < 8x+6, \\ 2x-1 > 5x-4, \\ 11x-9 < 15x+3. \end{cases}$

24. Найти количество целых решений системы неравенств

$$\frac{11}{x-11} < \frac{1}{x+10} \leqslant \frac{1}{11x},$$

принадлежащих промежутку $[-12; 2)$.

25. При каких m неравенство $\dfrac{x^2+mx-1}{2x^2-2x+3} < 1$ выполняется для всех x?

26. При всех значениях параметра a решить неравенство $ax > \dfrac{1}{x}$.

27. При каких значениях параметра m из неравенства $x^2-(3m+1)x+m>0$ следует неравенство $x>1$?

28. Найти значение параметра a, при котором наименьшее решение неравенства $\dfrac{ax-6}{x} \geqslant 6$ равно -2.

5.4. Домашнее задание

Найти наименьшие целые решения неравенств:

1. $\dfrac{3-2x}{x^2+3} \geqslant 1$.

2. $\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+3x+2} \geqslant 0$.

Найти наименьшее натуральное решение неравенств:

3. $x > \dfrac{15}{x+2}$.

4. $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-1} \geqslant \dfrac{1}{x}$.

5. Решить неравенство $\dfrac{3}{9-x^2} \geqslant \dfrac{1}{5}$.

Найти сумму всех целых решений неравенств:

6. $\dfrac{1}{x^2+4x+4} \leqslant \dfrac{5x-1}{(x^2+6x+8)(x^2+x-2)}$.

7. $\dfrac{x^3+15x^2+56x}{x^2+13x+42} \cdot \dfrac{1}{x+6} \leqslant 0$.

8. Найти число целых решений неравенства $\dfrac{x^2+x-20}{(x-7)(x-8)} \leqslant \dfrac{3}{x-8}$.

9. Найти число всех целых решений неравенства $\dfrac{20-x-x^2}{24x-2x^2-x^3} \geqslant 0$, принадлежащих промежутку $[-14; 5)$.

10. Найти число целых решений неравенства $\dfrac{x^2-2x+1}{(x-1)(x+3)} \geqslant -1$, принадлежащих отрезку $[-3, 2]$.

11. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{(x-3)^2}{(x-3)(x+1)} \geqslant 0, \\ (x-4)(x+4) \leqslant 0. \end{cases}$$

12. Решить двойное неравенство $-\dfrac{1}{4} < x^2 + x < 0$.

13. Найти число целых решений системы неравенств $\dfrac{8}{x-8} < \dfrac{1}{x+7} \leqslant \dfrac{1}{8x}$, принадлежащих промежутку $[-9; 2)$.

14. Найти наименьшее целое решение системы неравенств

$$2 < \frac{9x^2-6x+9}{2x^2+2} < 4.$$

15. Найти значение параметра a, при котором наибольшее отрицательное решение неравенства $\dfrac{ax+8}{x} \leqslant -4$ равно -4.

16. Найти все значения параметра a, при которых из неравенства $ax^2 - x + 1 - a < 0$ следует неравенство $0 < x < 1$.

5.5. Проверочный тест

1. Решение неравенства

$$\frac{x+1}{2-x} < 1$$

имеет вид

1) $(\frac{1}{2}, +\infty)$; 2) $(\frac{1}{2}, 2)$; 3) $(-\infty, \frac{1}{2})$; 4) $(-\infty, -2) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$; 5) $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$.

2. Решение неравенства

$$\frac{(x-1)(2x-3)x^2}{2x+1}\leqslant 0$$

имеет вид

1) $(-\infty,-\frac{1}{2})\cup[1,\frac{3}{2}]$; 2) $(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(1,\frac{3}{2})\cup\{0\}$;
3) $(-\infty,-\frac{1}{2})\cup[1,\frac{3}{2}]\cup\{0\}$; 4) $(-\frac{1}{2},1)\cup[\frac{3}{2},+\infty)$; 5) $[1,\frac{3}{2}]$.

3. Сумма целых решений неравенства

$$\frac{x}{x^2-3x+2}\cdot\frac{x^2-4x+3}{2-x}\geqslant 0$$

равна

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) 4.

4. Количество целых решений неравенства

$$4<\frac{16x^2-4x+16}{x^2+1}<15$$

равно

1) 3; 2) 4; 3) 2; 4) 0; 5) 1.

5. Наименьшее целое решение неравенства

$$\frac{x^2-3}{x^2-1}\geqslant 1$$

равно

1) 3; 2) -1; 3) -2; 4) 0; 5) 1.

6. Решение неравенства

$$\frac{2}{3x+7}\geqslant\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+1}$$

имеет вид

1) $(-3,-7/3)\cup[-2,-1)$; 2) $[-5,-3)\cup(-7/3,-2]\cup(-1,+\infty)$; 3) $(-5,-3)\cup(-2,-1)$; 4) $(-7,-3]\cup(-3,-2]\cup(-1,+\infty)$; 5) $(-\infty,-5)\cup(-3,-7/3)\cup[-2,-1]$.

7. Число целых решений неравенства

$$\frac{(x+5)^5}{(4-x)^2-20+8x}\leqslant 0$$

на промежутке $[-8,4]$ равно

1) 7; 2) 6; 3) 5; 4) 8; 5) 3.

8. Найти количество целых решений неравенства $4<\dfrac{16x^2-4x+16}{x^2+1}<15$.

9. Найти наибольшее целое значение параметра a, при котором система неравенств $\begin{cases}x^2<25,\\ x>a\end{cases}$ имеет решение.

10. Найти значения параметра a, при которых множество решений неравенства $(x-2)(x^2-ax-x+a)\geqslant 0$ содержит область определения функции $y=\sqrt{2x-3}$.

5.6. Ответы

Аудиторные задачи:

1. 2; **2.** -5; **3.** 0; **4.** -1; **5.** 4; **6.** 2; **7.** -3; **8.** -11; **9.** $(-3;-2)\cup(-2;-1/3)\cup(0;1/3)\cup(2;+\infty)$; **10.** $(-2;3]$; **11.** $(-3,3)$; **12.** $(-1;0)\cup[1/3;1)$; **13.**-2; **14.** -3; **15.** 3,5; **16.** $-3,5$; **17.** 6; **18.** 4; **19.** 2; **20.** 3; **21.** 7; **22.** $[-3,5;-2,5]$; **23.** $(-2,1)$; **24.** 1; **25.** $(-6;2)$; **26.** Если $a\leqslant 0$, то $x\in(-\infty,0)$, если $a>0$, то $x\in(-1/\sqrt{a},0)\cup(1/\sqrt{a},+\infty)$; **27.** Ни при каких; **28.** 3.

Домашнее задание:

1. -2; **2.** 0; **3.** 4; **4.** 3; **5.** $(-3,3)$; **6.** 1; **7.** -23; **8.** 1; **9.** 4; **10.** 3; **11.** $[-4;-1)\cup(3;4]$; **12.** $(-1,-1/2)\cup(-1/2,0)$; **13.** 1; **14.** 1; **15.** -2; **16.** $a\in(1/2,1]$.

6. Алгебраические неравенства

Иррациональные неравенства и их системы. Область допустимых значений. Неравенства, содержащие знак модуля, и их системы. Схемы решения. Равносильные преобразования неравенств и систем неравенств, неравенства с параметром.

6.1. Справочный материал

Иррациональные неравенства

Под *иррациональным неравенством* понимается неравенство, в котором неизвестная величина (или некоторые функции неизвестной величины) находятся под знаком радикала.

Для того чтобы найти множество решений иррационального неравенства, приходится, как правило, возводить обе части неравенства в натуральную степень (избавляться от корней). При этом необходимо следить за тем, чтобы при преобразовании неравенств каждый раз получалось неравенство, эквивалентное данному.

Нужно помнить, что при возведении в нечетную степень обеих частей неравенства получается неравенство, эквивалентное данному на области допустимых значений. Если же обе части неравенства возводить в четную степень, то будет получаться неравенство, эквивалентное исходному и имеющее тот же знак лишь в том случае, если обе части исходного неравенства неотрицательны.

Схема решения иррационального неравенства следующая:

1. Найти ОДЗ.

2. Разбить ОДЗ на промежутки так, чтобы на каждом из полученных промежутков обе части неравенства сохраняли знак.

3. На каждом из полученных промежутков решить неравенство (например, возведением в соответствующую степень).

4. Взять объединение получившихся решений.

Решение неравенств, содержащих неизвестную величину под знаком модуля

Для решения таких неравенств обычно избавляются от знаков модуля. Для этого надо отметить на координатной оси все точки, при переходе через которые меняет знак хотя бы одна из функций, находящихся в неравенстве под знаком модуля. Таким образом координатная ось разбивается на некоторое число промежутков. На каждом таком промежутке неравенство заменяется на другое неравенство, не содержащее знаков абсолютной величины и равносильное исходному неравенству на этом промежутке. Каждое из полученных неравенств решается, а из полученного множества решений отбираются те, которые лежат на рассматриваемом промежутке. Они и будут решениями исходного неравенства на этом промежутке. Наконец, для того, чтобы выписать все решения исходного неравенства, объединяют все его решения, найденные на этих промежутках.

Неравенства вида

$$|f(x)|>|g(x)| \text{ и } |f(x)|<|g(x)| \tag{1}$$

можно решать предложенным выше способом, однако иногда бывает проще заменить неравенства вида (1) равносильными им неравенствами

$$f^2(x)>g^2(x) \text{ и } f^2(x)<g^2(x).$$

Иногда возведение в квадрат неравенства, содержащего абсолютную величину, можно проводить на некотором множестве M.

6.2. Примеры

Пример 1. Решить неравенство

$$\sqrt{x+3}<\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}.$$

Решение. Область допустимых значений неравенства представляет собой промежуток $[2,+\infty)$.

Обе части неравенства на этом промежутке неотрицательны, поэтому, возводя обе части исходного неравенства в квадрат и приводя подобные члены, получим эквивалентное (на ОДЗ) неравенство

$$6-x<2\sqrt{x^2-3x+2}. \tag{2}$$

Рассмотрим теперь два возможных случая:

1) Если $6-x<0$ (т. е. $x>6$), то левая часть (2) отрицательна, а правая часть — неотрицательна и, следовательно, неравенство (2) справедливо при всех $x\in(6,+\infty)$.

2) Если $6-x\geqslant 0$, то для всех $x\in[2,6]$ обе части неравенства (2) неотрицательны. Возводя обе эти части в квадрат, получаем неравенство

$$3x^2-28>0,$$

решениями которого (с учетом сделанного предположения) будут значения из промежутка $(2\sqrt{7/3};6]$.

Объединяя множества полученных решений получаем ответ.

Ответ: $\left(2\sqrt{\dfrac{7}{3}};+\infty\right)$.

Пример 2. Решить неравенство

$$x^2-|5x-3|-x<2.$$

Решение. Для освобождения от знаков абсолютной величины разобьем координатную ось на две области: первую, в которой $5x-3\geqslant 0$, и вторую, в которой $5x-3<0$, и будем искать решения исходного неравенства в каждой из этих областей отдельно.

В первой области $|5x-3|=5x-3$ и неравенство перепишется так:

$$x^2-5x+3-x<2.$$

Решения этого неравенства образуют интервал $3-\sqrt{8}<x<3+\sqrt{8}$. Из этого множества в рассматриваемую область $x\geqslant 3/5$ попадает промежуток $3/5\leqslant x<3+\sqrt{8}$. Все эти x будут решениями исходного неравенства в первой области.

Во второй области $|5x-3|=-(5x-3)$ и исходное неравенство перепишется так:

$$x^2+4x-5<0.$$

Множество решений этого неравенства есть интервал $-5<x<1$. Из данного множества в рассматриваемую область $x<3/5$ попадает интервал $-5<x<3/5$. Все эти x и будут решениями исходного неравенства во второй области. Поскольку множество решений исходного неравенства является объединением множеств решений в первой и во второй областях, т. е. объединением двух промежутков $-5<x<3/5$ и $3/5\leqslant x<3+\sqrt{8}$, то это множество есть интервал $-5<x<3+\sqrt{8}$.

Ответ: $-5<x<3+\sqrt{8}$.

Пример 3. Решить неравенство

$$|5x-13|-|6-5x|\geqslant 7.$$

Решение. Для освобождения от знаков абсолютной величины разобьем координатную ось на три области: первую, в которой $x\geqslant 13/5$, вторую, в которой $6/5<x<13/5$, и третью, в которой $x\leqslant 6/5$.

В первой области $|5x-13|=5x-13$, $|6-5x|=-(6-5x)$ и неравенство перепишется так:

$$5x-13+(6-5x)\geqslant 7.$$

Это неравенство решений не имеет. Следовательно, и исходное неравенство не имеет решений на множестве $x\geqslant 13/5$.

Во второй области $|5x-13|=-(5x-13)$, $|6-5x|=-(6-5x)$ и исходное неравенство перепишется так:

$$-5x+13+(6-5x)\geqslant 7.$$

Множество решений этого неравенства есть промежуток $x\leqslant 6/5$. Из этого множества в рассматриваемую область не попадает ни одно x. Значит, во второй области исходное неравенство решений не имеет.

В третьей области $|5x-13|=-(5x-13)$, $|6-5x|=6-5x$ и исходное неравенство перепишется так:

$$-5x+13-6+5x\geqslant 7.$$

Этому неравенству удовлетворяет любое действительное число, а значит, и любое число из третьей области $x\leqslant 6/5$. Следовательно, множество решений исходного неравенства есть промежуток $x\leqslant 6/5$.

Ответ: $-\infty<x\leqslant 6/5$.

Пример 4. Решить неравенство

$$|x^2+x|>|x^2-x|.$$

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству

$$(x^2+x)^2>(x^2-x)^2,$$

т. е. неравенству

$$x^3>0.$$

Решениями этого неравенства, а значит и исходного, являются все x из промежутка $x>0$.

Ответ: $0<x<+\infty$.

Пример 5. Найдите все значения x, при которых точки графика функции $y=\sqrt{x^2-7,1x+0,7}+\sqrt{10x-1}$ лежат *не выше* оси абсцисс.

Решение. Из условия задачи следует неравенство

$$\sqrt{x^2-7,1x+0,7}+\sqrt{10x-1}\leqslant 0.$$

Так как $\sqrt{x^2-7,1x+0,7}\geqslant 0$ и $\sqrt{10x-1}\geqslant 0$, то левая часть неравенства принимает только неотрицательные значения, поэтому исходное неравенство выполняется только при $\sqrt{x^2-7,1x+0,7}=\sqrt{10x-1}=0$. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-7,1x+0,7=0, \\ 10x-1=0. \end{cases}$$

Единственный корень второго уравнения $x=0,1$ является и корнем первого уравнения, поэтому решение задачи – число $x=0,1$.

Ответ: $x=0,1$.

Пример 6. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x+y-2\sqrt{x+y+55}\geqslant -20; \\ x^2+8x+y^2+8y+30\leqslant 0. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем первое неравенство: пусть $x+y+20=t$, тогда получим $2\sqrt{t+35}\leqslant t$, отсюда $t\geqslant 0$ и $t^2-4t-140\geqslant 0$. Решением квадратного неравенства является множество $(-\infty;-10]\cup[14;+\infty)$, с учетом неотрицательности получим $t\geqslant 14$, т. е. $x+y \geqslant -6$. Это неравенство задает полуплоскость, расположенную выше прямой, проходящей через точки $(-6,0)$ и $(0,-6)$. Преобразуем второе неравенство:

$$(x^2+8x+16)+(y^2+8y+16) \leqslant 2, \quad (x+4)^2+(y+4)^2 \leqslant (\sqrt{2})^2.$$

Это неравенство задает круг радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке $(-4,-4)$. Решением системы неравенств являются общие точки построенной полуплоскости и круга (см. рис. 10). Такая точка только одна, она имеет координаты $(-3,-3)$.

Ответ: $(-3,-3)$.

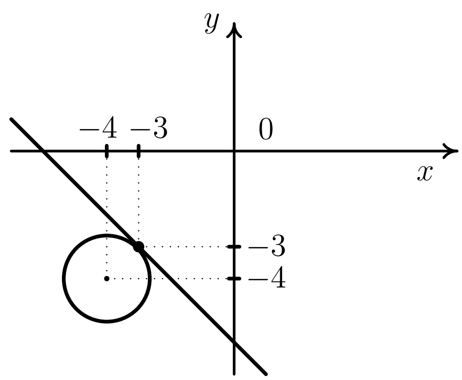

Рис. 10

6.3. Аудиторные задачи

Решить неравенства:

1. $|2x-1|-|x-2| \geqslant 4$.

2. $|x^2-11|<10$.

Решить неравенства и указать наименьшее целое положительное решение для каждого из них:

3. $|x-3|<-1$.

4. $|x-2|\cdot(x-1)>0$.

5. $|2x^2-9x+15| \geqslant 11$.

6. $x^2-|5x+6|>0$.

7. $|2x-1|+|x-3| \leqslant 4$.

8. $|x^3-1|\cdot(x-9)<0$.

9. Найти сумму целых решений неравенства $7+|3x-5| \leqslant 11$.

10. Найти сумму целых решений системы неравенств

$$\begin{cases} |x| \geqslant 5 \\ |x+3|<6. \end{cases}$$

Решить неравенства:

11. $\sqrt{9x-20}<x$.

12. $\sqrt{-x}\cdot(x+1)>0$.

Решить неравенства и указать их наименьшие целые решения:

13. $(x-1)\sqrt{x}<0$.

14. $\sqrt{5-x}>\sqrt{x+1}$.

15. $\sqrt{2-\sqrt{x}}>1$.

Решить неравенства:

16. $\sqrt{x+61}<x+5$.

17. $\sqrt{x+7}>x+1$.

18. $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\leqslant 0$.

19. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x+\sqrt{x}+1}<0,5$.

Найти наименьшие целые решения неравенств:

20. $\sqrt{x^2+5x+7}<3+x$.

21. $\sqrt{x^2+6x+10}>\sqrt{4+x}$.

22. $\sqrt{6-x^2}>\sqrt{-x}$.

23. $\sqrt[3]{x^2-5x-6}\cdot\sqrt[4]{4-x}<0$.

24. $\dfrac{\sqrt{x+5}-1}{\sqrt{x+6}-2}>0$.

Найти число целых решений неравенств:

25. $\sqrt{\dfrac{12-3x^2}{x}}\leqslant 3$.

26. $\sqrt{x-6}-\sqrt{x-10}\geqslant 1$.

27. $\sqrt{4-x}-\dfrac{20}{\sqrt{4-x}}\leqslant 1$.

28. $\sqrt{\dfrac{16x-28-x^2}{23}}\leqslant\dfrac{16x-28-x^2}{23}$.

Найти площадь фигуры, заданной неравенствами:

29. $|x|+|y-1|\leqslant 4$.

30. $|x-1|+|y-2|\leqslant 10$.

31. $x^2+y^2\leqslant 4|x|+6|y|$.

32. Найти площадь фигуры, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} x\leqslant 4-2|y-1| \\ x\geqslant 4|y-1|-8. \end{cases}$$

33. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$x^2+3|x-a|\geqslant a^2$$

справедливо для всех x.

34. Решить неравенство $|x^2-2|+x<0$.

35. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$3-|x-a|>x^2$$

имеет хотя бы одно отрицательное решение.

6.4. Домашнее задание

Решить неравенства и указать наименьшее положительное целое решение каждого из них:

1. $\dfrac{1}{|x|} \geqslant \dfrac{1}{3}$.

2. $|x-2|+|x+2| \leqslant 4$.

3. $\left|\dfrac{2}{x-13}\right| > \dfrac{8}{9}$.

4. Решить неравенство $|x^2-7|<6$.

5. Найти сумму целых решений неравенства $|2x-4|-3 \leqslant 7$.

6. Найти количество целых решений неравенства $(x^2-2x-3)|x-2|<0$.

7. Найти сумму целых решений системы неравенств

$$\begin{cases} |x-6| \geqslant 3 \\ 1<x<10. \end{cases}$$

Найти длины промежутков, на которых выполняются неравенства:

8. $x-4\sqrt{x}-5 \leqslant 0$.

9. $(x^2-1)\sqrt{-x} \leqslant 0$.

10. $\sqrt{5-x}>\sqrt{x}$.

Найти число целых решений неравенств:

11. $\sqrt{2-x}-\dfrac{3}{\sqrt{2-x}} \leqslant -2$.

12. $\sqrt{x+4}<3-x$.

13. $\sqrt[3]{x^2+4x-5}\cdot\sqrt[4]{x+3} \leqslant 0$.

14. Найти наибольшее целое решение неравенства $\sqrt{x^2-12x+37}>\sqrt{7-x}$.

Найти площадь фигуры, заданной неравенствами:

15. $|x+1|+|y-2| \leqslant 5$.

16. $x^2+y^2 \leqslant 4|x|+10|y|$.

17. Найти площадь фигуры, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} x+2|y+3| \leqslant 6 \\ 3x+2|y+3| \geqslant 6. \end{cases}$$

Решить неравенства:

18. $|x^2-3|+2x+1 \geqslant 0$.

19. $\dfrac{\sqrt{x+5}}{1-x}<1$.

20. $\sqrt{x-1}-\sqrt{x+\sqrt{x}-1}<0,1$.

6.5. Проверочный тест

1. Решение неравенства $|x^2-4| \leqslant 3$ имеет вид

1) $(1,\sqrt{7})$; 2) $(-\sqrt{7},\sqrt{7})$; 3) $(-\sqrt{7},0)\cup(0,\sqrt{7})$; 4) $[-\sqrt{7},-1]\cup[1,\sqrt{7}]$; 5) $(-\sqrt{7},-1)$.

2. Площадь фигуры, заданной неравенством

$$|x-1|+|y-3| \leqslant 6,$$

равна

1) 72; 2) 18; 3) 36; 4) 30; 5) 25.

3. Число целых решений неравенства

$$\sqrt{\frac{x^2-3}{x}}<1$$

равно

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) 4.

4. Решение неравенства

$$\frac{1+|x-1|}{2}\geqslant 2$$

имеет вид 1) $[2,-4]$; 2) $(-\infty,-2]\cup[4,+\infty)$; 3) $[2,4]$;

4) $(-\infty,2]\cup[4,+\infty)$; 5) $(2,4)$.

5. Сумма целых решений неравенства

$$|2x-1|+|3-x|\leqslant 4$$

равна

1) 3; 2) -1; 3) 2; 4) 0; 5) 1.

6. Все решения неравенства

$$\sqrt{6x-17}\geqslant 4-x$$

составляют множество

1) $(-3,3)$; 2) $(-\infty,0)\cup[\frac{17}{6},+\infty)$; 3) $[\frac{17}{6},+\infty)$; 4) $[3,+\infty)$; 5) $[4,+\infty)$.

7. Наибольшее целое решение неравенства

$$\sqrt{x^2-6}>-\sqrt{-x}$$

равно

1) 3; 2) -8; 3) -3; 4) -2; 5) -9.

8. Решить неравенство $\sqrt{x-1}-\sqrt{x+\sqrt{x}-1}<0,1$.

9. Найти значения параметра a, при которых неравенство

$$\left|a\sqrt{x-1}-x\sqrt{a-1}\right|\leqslant 4x-4-x^2$$

имеет решение.

10. Найти наименьшее значение параметра a, при котором множество решений неравенства

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[4]{25(x-1)}}{\sqrt{9-x^2}}\leqslant ax^2+3$$

содержит ровно два целых числа.

6.6. Ответы

Аудиторные задачи:

1. $(-\infty, -5] \cup [3, +\infty)$; **2.** $(-\sqrt{21}; -1) \cup (1; \sqrt{21})$; **3.** Нет решений; **4.** 3; **5.** 4; **6.** 7; **7.** 1; **8.** 2; **9.** 6; **10.** -26; **11.** $[20/9; 4) \cup (5, +\infty)$; **38.** $(-1, 0)$; **13.** Нет целых решений; **14.** -1; **15.** 0; **16.** $(3; +\infty)$; **17.** $[-7; 2)$; **18.** $(-\infty; -1] \cup \{2\}$; **19.** $[-1; +\infty)$; **20.** -1; **21.** -4; **22.** -1; **23.** 0; **24.** -5; **25.** 5; **26.** 3; **27.** 4; **28.** 9; **29.** 32; **30.** 200; **31.** $48 + 26\pi$; **32.** 24; **33.** $[-3/2; 3/2]$; **34.** $(-2, -1)$; **35.** $a \in (-13/4, 3)$. *Указание:* записав неравенство в виде $3 - x^2 > |x - a|$, построить и исследовать графики функций, входящих в левую и правую части неравенства;

Домашнее задание:

1. 1; **2.** 3; **3.** 11; **4.** $(-\sqrt{13}; -1) \cup (1; \sqrt{13})$; **5.** 22; **6.** 2; **7.** 14; **8.** 25; **9.** 1; **10.** 2,5; **11.** 1; **12.** 5; **13.** 5; **15.** 50; **16.** $80 + 58\pi$; **17.** 12; **18.** $(-\infty, -1] \cup [1 - \sqrt{5}, +\infty)$; **19.** $[-5, -1) \cup (1, +\infty)$; **20.** $[1, +\infty)$.

7. Преобразование тригонометрических выражений

Понятие угла и дуги, их градусная и радианная меры. Определение тригонометрических функций числового аргумента: синуса, косинуса, тангенса и котангенса. Промежутки сохранения знака для тригонометрических функций. Вычисление значений тригонометрических выражений без таблиц. Зависимость между тригонометрическими функциями одного аргумента. Основное тригонометрическое тождество. Четность, нечетность. Периодичность. Формулы сложения. Формулы приведения. Тригонометрические функции двойного и половинного аргумента. Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение и обратно. Определение обратных тригонометрических функций: арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса. Нахождение тригонометрических функций от обратных тригонометрических функций.

7.1. Справочный материал

Числовая окружность (тригонометрический круг)

Введем понятие числовой окружности (тригонометрического круга) (рис. 11). Пусть на плоскости задана декартова система координат. Построим окружность радиуса 1 с центром в начале координат.

Поставим в соответствие каждому действительному числу t точку $M(t)$ окружности по следующему правилу:

— если $t = 0$, то ему соответствует точка $A = M(0)$ — правая точка пересечения окружности с осью Ox;

— если $t > 0$, то, отправляясь из точки A, пройдем по окружности против часовой стрелки путь длиной t; конец этого пути и будет искомой точкой $M(t)$;

— если $t < 0$, то, отправляясь из точки A, опишем по окружности в направлении по часовой стрелке путь длиной $|t|$; конец этого пути и будет искомой точкой $M(t)$.

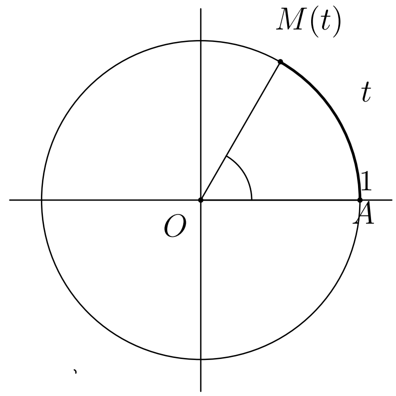

Рис. 11. Числовая окружность (тригонометрический круг)

Единичная окружность с установленным соответствием называется *числовой* или *тригонометрической окружностью.*

Из определения понятно, что каждому действительному числу t соответствует единственная точка $M(t)$ числовой окружности и угол α между осью x и радиусом-вектором точки.

Если точка M соответствует числу t, то она соответствует любому числу вида $x=t+2\pi k$, где 2π — длина единичной окружности, а k — целое число, показывающее количество полных обходов окружности в ту или иную сторону при построении точки $M(t)$.

Радианная и градусная меры углов

Если величина угла выражена в градусах, то для вычисления ее в радианах следует пользоваться формулой

$$\alpha \text{ радиан} = \frac{\alpha^0}{180^0} \cdot \pi.$$

Отсюда можно получить формулу

$$\alpha^0 = \frac{\alpha \text{ радиан}}{\pi} \cdot 180^0.$$

Градусную меру угла $\alpha = \dfrac{\pi}{24}$ вычисляют так:

$$\alpha^0 = \frac{\pi/24}{\pi} \cdot 180^0 = \frac{180^0}{24} = 7,5^0 = 7^0 30'.$$

Для быстрого решения простых задач *целесообразно помнить*, что $\dfrac{\pi}{6} = 30^\circ$, $\dfrac{\pi}{4} = 45^\circ$, $\dfrac{\pi}{3} = 60^\circ$, $\dfrac{\pi}{2} = 90^\circ$, $\dfrac{2\pi}{3} = 120^\circ$, $\dfrac{3\pi}{4} = 135^\circ$, $\pi = 180^\circ$, $2\pi = 360^\circ$.

Определение тригонометрических функций

Определим основные тригонометрические функции. Пусть задана числовая окружность, t — произвольное действительное число и $M(t)$ — соответствующая ему точка числовой окружности. Тогда

$\sin t$ — ордината точки $M(t)$;

$\cos t$ — абсцисса точки $M(t)$. Далее,

$$\operatorname{tg} t=\frac{\sin t}{\cos t}; \quad \operatorname{ctg} t=\frac{\cos t}{\sin t}; \quad \sec t=\frac{1}{\cos t}; \quad \operatorname{cosec} t=\frac{1}{\sin t}.$$

Период тригонометрических функций

Напомним, что *периодом* функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$ является число $T=2\pi$. Периодом функций $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ выступает число $T=\pi$.

Следует помнить, что 2π на самом деле будет *наименьшим положительным* периодом этих функций. А числа $2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$, также являются периодами функций $\sin x$ и $\cos x$.

Известно, что периоды функций

$$y=A\sin(\omega x+\varphi) \quad \text{и} \quad y=A\cos(\omega x+\varphi)$$

вычисляются по формуле $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$, а период функции

$$y=A\operatorname{tg}(\omega x+\varphi)$$

по формуле $T=\dfrac{\pi}{\omega}$.

Если период функции $y=f(x)$ равен T_1, а период функции $y=g(x)$ равен T_2, то период функций $y=f(x)+g(x)$ и $y=f(x)-g(x)$ равен наименьшему числу, при делении которого на T_1 и T_2 получаются целые числа.

Значения тригонометрических функций основных углов

Функция	Угол				
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не определен
ctg	не определен	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Формулы приведения

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha;$ $\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha;$

$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha;$ $\quad \sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha;$

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right) = -\cos\alpha;$ $\quad \sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = -\cos\alpha;$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha;$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha;$ $\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha;$

$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha;$ $\quad \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha;$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = -\sin\alpha;$ $\quad \cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right) = \sin\alpha;$

$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha;$ $\quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha;$

$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha;$

$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha;$ $\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha.$

Обратные тригонометрические функции

Определение 1. $\alpha = \arcsin a$, если

$$1)\ \sin\alpha = a; \qquad 2)\ \alpha \in [-\pi/2;\ \pi/2].$$

Например, $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin 1 = \pi/2$, $\arcsin(-1) = -\pi/2$, $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

Определение 2. $\alpha = \arccos a$, если

$$1)\ \cos\alpha = a; \qquad 2)\ \alpha \in [0;\ \pi].$$

Например, $\arccos 0 = \pi/2$, $\arccos 1 = 0$, $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

Определение 3. $\alpha = \operatorname{arctg} a$, если

$$1)\ \operatorname{tg}\alpha = a; \qquad 2)\ \alpha \in (-\pi/2;\ \pi/2).$$

Например, $\operatorname{arctg} 0 = 0$, $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$, $\operatorname{arctg}(-1) = -\pi/4$.

Определение 4. $\alpha = \operatorname{arcctg} a$, если

$$1)\ \operatorname{ctg}\alpha = a; \qquad 2)\ \alpha \in (0;\pi).$$

Например, $\operatorname{arcctg} 0 = \pi/2$, $\operatorname{arcctg} 1 = \pi/4$, $\operatorname{arcctg}(-1) = 3\pi/4$.

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, \qquad \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=1,$$
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad 1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},$$
$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Формулы сложения

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \quad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Формулы кратных аргументов

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha,$$
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},$$
$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha,$$
$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$$

Формулы преобразования сумм или разностей в произведения

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$
$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \qquad \operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$
$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=-\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Преобразование произведений в суммы или разности

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)],$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)].$$

Формулы понижения степени

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},\qquad \cos^3\alpha=\frac{3\cos\alpha+\cos 3\alpha}{4},$$
$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},\qquad \sin^3\alpha=\frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4}.$$

Формулы половинного аргумента

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

В этих формулах знак "+"или "−"выбирается в зависимости от того, в какой четверти находится угол $\frac{\alpha}{2}$.

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

7.2. Примеры

Пример 1. Вычислить $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$ и $\pi<\alpha<\dfrac{3}{2}\pi$.

Решение. Имеем $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{16}{25}$. Отсюда $\cos\alpha=\pm\dfrac{4}{5}$. Так как угол α в третьей четверти, то следует взять $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$. Теперь вычисляем $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\left(-\dfrac{3}{5}\right):\left(-\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{3}{4}$.

Ответ: $\dfrac{3}{4}$.

Пример 2. Дано $\cos 2\alpha=\dfrac{1}{8}$, $\quad\dfrac{3\pi}{2}<2\alpha<2\pi$. Вычислить $2\sin\alpha+3\cos\alpha$.

Решение. Воспользуемся формулами понижения степени

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}=\frac{1-\frac{1}{8}}{2}=\frac{7}{16},$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}=\frac{1+\frac{1}{8}}{2}=\frac{9}{16}.$$

Так как угол α во второй четверти $\left(\frac{3\pi}{4}<\alpha<\pi\right)$, то $\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$, а $\cos\alpha=-\frac{3}{4}$. Тогда $2\sin\alpha+3\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{9}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{9}{4}$.

Пример 3. Вычислить $\cos\left(2\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$.

Решение. Обозначим $\alpha=\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$. По определению арккосинуса $\cos\alpha=-\frac{1}{4}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Таким образом, нам нужно найти $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{1}{4}$ и угол α лежит во второй четверти

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\left(-\frac{1}{4}\right)^2-1=-\frac{7}{8}.$$

Ответ: $-\frac{7}{8}$.

Пример 4. Вычислить $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Решение. $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$, отсюда $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

Пример 5. Вычислить $\cos 15^0-\sin 15^0$.

Решение. Обозначим $a=\cos 15^0-\sin 15^0$, тогда

$$a^2=\cos^2 15^0-2\sin 15^0\times\cos 15^0+\sin^2 15^0=1-\sin 30^0=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

поэтому $a=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Из условия ясно, что $a>0$.

Ответ: $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пример 6. Найти период функции $y=\cos x\cdot\cos 6x$.

Решение. Воспользуемся формулой преобразования произведения в сумму

$$y=\cos x\cos 6x=\frac{1}{2}[\cos(x-6x)+\cos(x+6x)]=\frac{1}{2}\cos 5x+\frac{1}{2}\cos 7x.$$

Период функции $y=\cos 5x$ равен $T_1=\frac{2\pi}{5}$, а период функции $y=\cos 7x$ равен $T_2=\frac{2\pi}{7}$. Наименьшее число, при делении которого на $T_1=\frac{2\pi}{5}$ и $T_2=\frac{2\pi}{7}$ получается целое число, есть число 2π.

Ответ: 2π.

Пример 7. Упростить $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha+2\sin^2\alpha}$.

Решение. Раскроем в числителе скобки и воспользуемся формулами двойного аргумента, получим

$$\frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+2\sin^\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=1.$$

Пример 8. Упростить $\dfrac{4\sin 25^0\cdot\sin 65^0}{\cos 40^0}$.

Решение. Заметим, что $65^0=90^0-25^0$, и воспользуемся формулами приведения и двойного аргумента

$$\frac{4\sin 25^0\sin 65^0}{\cos 40^0}=\frac{4\sin 25^0\sin(90^0-25^0)}{\cos 40^0}=\frac{4\sin 25^0\cdot\cos 25^0}{\cos 40^0}$$
$$=\frac{2\sin 50^0}{\cos 40^0}=\frac{2\sin(90^0-50^0)}{\cos 40^0}=\frac{2\cos 40^0}{\cos 40^0}=2.$$

Пример 9. Известно, что $\cos\alpha=-\dfrac{2}{5}$ и $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Найти значения $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение. Из основного тригонометрического тождества

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

находим: $|\sin\alpha|=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, $|\sin\alpha|=\sqrt{1-\left(-\dfrac{2}{5}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$. В заданном интервале $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ значения $\sin\alpha$ положительны, поэтому

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{21}}{5},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{\sqrt{21}}{5}}{-\frac{2}{5}}=-\frac{\sqrt{21}}{2},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{-2}{\sqrt{21}}=-\frac{2\sqrt{21}}{21}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{21}}{5}$; $\quad -\dfrac{\sqrt{21}}{2}$; $\quad -\dfrac{2\sqrt{21}}{21}$.

Пример 10. Упростить выражение $\cos(\arcsin x)$.

Решение. $-1\leqslant x\leqslant 1$. Положим $y=\arcsin x$. Тогда $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ и $\sin y=x$. Чтобы найти $\cos y$, воспользуемся соотношением $\cos^2 y=1-\sin^2 y$. Получаем $\cos^2 y=1-x^2$, но $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2}$. На этом отрезке косинус принимает только положительные значения. Таким образом, $\cos y=\sqrt{1-x^2}$, т. е. $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$, где $-1\leqslant x\leqslant 1$.

Ответ: $\sqrt{1-x^2}$, где $-1\leqslant x\leqslant 1$.

7.3. Аудиторные задачи

Вычислить значения тригонометрических функций:

1. $\sin 75^\circ \sin 15^\circ$. **2.** $\cos 105^\circ + \cos 75^\circ$. **3.** $\dfrac{4\sin 25^\circ \sin 65^\circ}{\cos 40^\circ}$. **4.** $\cos 15^\circ + \sin 15^\circ$.

Вычислить

5. $2\sin\dfrac{\pi}{24}\cos\dfrac{\pi}{24}\left(\cos^2\dfrac{\pi}{24} - \sin^2\dfrac{\pi}{24}\right)$.

6. $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12} + \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{12}$.

7. $\sin^2 7^\circ 30' \ \sin 45^\circ - \cos 45^\circ \cos^2 52^\circ 30'$.

8. $\dfrac{\cos 70^\circ \cos 10^\circ + \cos 80^\circ \cos 20^\circ}{\cos 68^\circ \cos 8^\circ + \cos 82^\circ \cos 22^\circ}$.

9. $\operatorname{tg}(-750^\circ)\operatorname{ctg}\dfrac{31}{6}\pi$.

10. $\dfrac{\sin 91^\circ - \sin 1^\circ}{9\sqrt{2}\cos 46^\circ + \sqrt{2}\sin 44^\circ}$.

11. $6\cos 80^\circ - \dfrac{3\sqrt{3}}{2\cos 50^\circ}$.

12. $2\sin 44^\circ \cdot \cos 16^\circ + 2\sin^2 31^\circ - 1$.

13. Вычислить $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ и $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

14. Вычислить $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

15. Вычислить $\sin^2\alpha$, если $\cos 2\alpha = \dfrac{1}{4}$.

16. Найти $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = 0,8$, $\alpha \in (0, \pi/2)$.

17. Найти $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{7}$, $\pi < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi$.

18. Найти $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$ и угол α находится в четвертой четверти.

19. Найти $\operatorname{tg} x$, если $\sin(x + 30^\circ) + \sin(x - 30^\circ) = 2\sqrt{3}\cos x$.

20. Найти $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$.

21. Найти $\sin^2(\dfrac{\pi}{4} - \alpha)$, если $\sin 2\alpha = \dfrac{1}{3}$.

22. Вычислить $\sin(2\operatorname{arctg}(-1/7))$.

23. Вычислить $\sin(2\arcsin(-1/7))$.

24. Вычислить $\cos(2\arccos(-1/4))$.

25. Вычислить $\sin(315\operatorname{arcctg}(-1))$.

26. Вычислить $\cos(\operatorname{arctg} 1 + \arcsin\dfrac{12}{13})$.

27. Найти числитель (вместе со знаком) числа $\operatorname{tg}(\arcsin 1/2)$, записанного в виде несократимой простой дроби без иррациональности в знаменателе.

28. Найти числитель (вместе со знаком) числа $\operatorname{tg}(2\arcsin(-1/3))$, записанного в виде несократимой простой дроби без иррациональности в знаменателе.

29. Найти значение выражения $\arcsin(\sin 2,5)$.

30. Найти значение выражения $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 4)$.
31. Найти значение выражения $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 6)$.
32. Найти период функции $y=3\sin(x-2)+7\cos\pi x$.
33. Найти период функции $y=\sin 2x-2\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.
34. Найти период функции $y=\cos(3x-2)-\operatorname{tg}(4x+1)+\operatorname{ctg} 2x$.
35. Определить знак выражения $\dfrac{\operatorname{tg}(\sin 5)}{\sin(\cos\pi)}$.
36. Вычислить

$$\frac{3\operatorname{ctg}^2 15^\circ-1}{3-\operatorname{ctg}^2 15^\circ}.$$

37. Проверить справедливость равенства

$$\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}=\operatorname{arctg}\frac{11}{2}.$$

38. Проверить равенство

$$\operatorname{arctg} 1+\operatorname{arctg} 2=\pi-\operatorname{arctg} 3.$$

Упростить:
39. $\sin^2\alpha+\cos(60^\circ+\alpha)\cos(60^\circ-\alpha)$.
40. $\dfrac{2\sin^2\alpha-1}{1-2\cos^2\alpha}$.
41. $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{1+\sin 2\alpha}$.
42. $\cos 2\gamma+2\sin(\gamma+30^\circ)\sin(\gamma-30^\circ)$.
43. $2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\cos\alpha$.
44. $\dfrac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}-\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$.
45. $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}\cdot\dfrac{3}{\cos 2\alpha}$.
46. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)}$.
47. $\cos^2 2\alpha+4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.
48. $\dfrac{\cos 1^\circ-\cos 89^\circ}{9\sqrt{2}\cos 46^\circ+\sqrt{2}\sin 44^\circ}$.
49. $4\sin(15^\circ+\alpha)\cos(15^\circ-\alpha)-2\sin 2\alpha$.
50. $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$.
Упростить выражения:
51. $\dfrac{\sin 3\alpha\cos^3\alpha+\cos 3\alpha\sin^3\alpha}{\sin 4\alpha}$.
52. $\dfrac{\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)}{2\sin^2\alpha\sin^2\beta}-\operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\beta$.

53. $4\cos\alpha\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(\alpha+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\cos 3\alpha.$

54. $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}.$

55. $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)+(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha-\beta).$

56. $2-2\sin^2 2\beta-\cos 4\beta.$

57. $\dfrac{(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2}{\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}}.$

58. $\dfrac{\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}{\cos\alpha}.$

59. $\dfrac{1-\cos 4\alpha}{\cos^{-2}2\alpha-1}+\dfrac{1+\cos 4\alpha}{\sin^{-2}2\alpha-1}.$

60. $\dfrac{(1+\operatorname{tg}\alpha)\cos\alpha}{2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}.$

61. $\dfrac{2(1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha)}{\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}.$

62. $4\sin(30^\circ+\alpha)\cos\alpha-2\cos(60^\circ-2\alpha).$

63. $(1-\operatorname{tg}\alpha)^2+(1+\operatorname{tg}\alpha)^2-\dfrac{2}{\cos^2\alpha}.$

64. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$

65. $8\cos^4 x-4\cos 2x-\cos 4x.$

66. $\dfrac{1-\sin^6 x-\cos^6 x}{1-\sin^4 x-\cos^4 x}.$

67. $\dfrac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)}.$

68. $\cos^2\alpha+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right).$

69. $\left(\dfrac{1}{\sin\alpha}-\dfrac{1}{\sin 3\alpha}\right)\cdot\dfrac{1}{\cos\alpha+\cos 5\alpha}.$

70. $\dfrac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}-2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$, если α находится во второй четверти.

71. $\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)-\sin^2\beta.$

72. $3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha).$

73. $\dfrac{3\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{(\sin\alpha)^{-1}+(\operatorname{tg}\alpha)^{-1}}.$

Доказать тождества:

74. $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2\alpha.$

75. $\dfrac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$

76. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}3\alpha=-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}3\alpha$.

77. $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$.

78. $\dfrac{\sin\alpha+2\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\sin 3\alpha+2\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}=\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha}$.

79. $\dfrac{1}{\operatorname{tg}3\alpha-\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{1}{\operatorname{ctg}3\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{ctg}2\alpha$.

7.4. Домашнее задание

Вычислить:

1. $\operatorname{tg}^2\dfrac{11}{3}\pi+\operatorname{ctg}(-0,25\pi)+4\cos^2\dfrac{31}{6}\pi$.

2. $\dfrac{\cos^2 37^\circ-\sin^2 23^\circ}{\cos 14^\circ}$.

3. $\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ$.

4. $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}$.

Найти:

5. $\operatorname{ctg}\alpha-2\operatorname{ctg}2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=5$.

6. $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$.

7. $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$, если $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$.

8. $\cos^2\big(\dfrac{5\pi}{4}+\alpha\big)$, если $\sin 2\alpha=-0,4$.

9. $\operatorname{tg}(2\operatorname{arcctg}(-2))$.

10. $\operatorname{ctg}\big(250\arccos(-\dfrac{\sqrt{3}}{2})\big)$.

11. $\operatorname{tg}\big(\dfrac{1}{2}\arcsin(2/3)\big)$.

12. $\operatorname{tg}\big(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}\big)$.

13. $\cos\big(\operatorname{arcctg}(-\dfrac{1}{5})+\dfrac{5}{2}\pi\big)$.

14. Найти числитель (вместе со знаком) числа $\sin(\arcsin(1/3)+\arcsin(2/3))$, записанного в виде несократимой простой дроби без иррациональности в знаменателе.

15. Найти значение выражения $\arcsin(\sin 4)$.

16. Найти период функции $y=\sin\dfrac{\pi x}{6}+\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{30}$.

17. Найти период функции $y=7\sin\dfrac{x}{2}-\cos\left(\dfrac{2}{5}x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

18. Определить знак выражения $\dfrac{\operatorname{tg}(\sin\pi)}{\sin(\cos 4)}$.

19. Проверить справедливость равенства

$$\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}.$$

Упростить выражения:

20. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha+\dfrac{1}{\sin 2\alpha}}{\dfrac{1}{\cos(\pi/2-2\alpha)}}.$

21. $\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}.$

22. $\dfrac{\sin 2\alpha-2\sin\alpha}{\sin 2\alpha+2\sin\alpha}+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}.$

23. $\sin\left(2\alpha-\dfrac{3}{2}\pi\right)+\cos\left(2\alpha-\dfrac{8}{3}\pi\right)+\cos\left(\dfrac{2}{3}\pi+2\alpha\right).$

24. $\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{2\operatorname{tg}(\alpha-\pi/4)\sin^2(\alpha+\pi/4)}.$

25. $\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}\left(1+\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}.$

26. $\dfrac{\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}^2(\alpha-2\pi)}+\dfrac{\sin^2(-\alpha)}{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}.$

27. $\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{1-2\sin\alpha\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}-\dfrac{4\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$

28. $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin 3\alpha-sin\alpha}\cdot\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}.$

29. $\dfrac{\sin 4\alpha+\sin 9\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\cos 4\alpha+\cos 9\alpha}.$

30. $\dfrac{\cos(170^\circ+\alpha)-\sin(100^\circ-\alpha)}{\sin(280^\circ-\alpha)}.$

Доказать тождества:

31. $\dfrac{\sin 3\alpha\cos^3\alpha+\cos 3\alpha\sin^3\alpha}{3}=\dfrac{\sin 4\alpha}{4}.$

32. $\sin^6\dfrac{\alpha}{2}-\cos^6\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin^2\alpha-4}{4}\cos\alpha.$

33. $\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta=\dfrac{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$

7.5. Проверочный тест

1. Значение

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta),$$

если $\operatorname{tg}\alpha=2$, $\sin\beta=\frac{7}{25}$, $90^\circ<\beta<180^\circ$, равно

1) $\frac{2}{11}$; 2) 2; 3) $-\frac{2}{11}$; 4) -2; 5) $\frac{1}{2}$.

2. Значение

$$\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$$

равно

1) $-2\sqrt{2}$; 2) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 3) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 4) $2\sqrt{2}$; 5) $\frac{3}{4}$.

3. Период функции

$$y=\operatorname{tg}2x-\operatorname{ctg}3x+7\cos 5x$$

равен

1) π; 2) 2π; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) 3π; 5) не существует.

4. Значение выражения

$$\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos(45^\circ-\alpha)}{2\sin(30^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\sin\alpha}.$$

после упрощения равно

1) $\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\operatorname{tg}\alpha$; 3) $-\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$; 4) $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}}$; 5) $\sqrt{2}\sin\alpha$.

5. Значение выражения

$$\frac{1-4\sin^2\alpha}{4\cos^2\alpha-3}.$$

после упрощения равно

1) 0; 2) 1; 3) -1 4) 2; 5) -2.

6. Значение выражения

$$\frac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}.$$

после упрощения равно

1) $\operatorname{ctg}\alpha$; 2) $-\operatorname{ctg}\alpha$; 3) $\cos\alpha$ 4) -1; 5) $-\cos\alpha$.

7. Значение выражения

$$\frac{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}{2\cos\alpha+\sin 2\alpha}\cdot\frac{1-\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$$

после упрощения равно

1) $2\operatorname{ctg}^3\alpha$; 2) $\operatorname{tg}^3\alpha$; 3) $\operatorname{tg}^2\alpha$ 4) 1; 5) 0.

8. Найти значение выражения

$$\frac{(\sin 10^\circ+\sin 80^\circ)(\cos 80^\circ-\cos 10^\circ)}{\sin 70^\circ}.$$

9. Упростить выражение

$$(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta.$$

10. Найти значение выражения $\arccos(\cos 6)$.

7.6. Ответы

Аудиторные задачи:

1. 0,25; **2.** 0; **3.** 2; **4.** $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$; **5.** 0,25; **6.** 4; **7.** -0,25; **8.** 1; **9.** -1; **10.** 0,1; **11.** -3; **12.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; **13.** 0,75; **14.** $-\dfrac{5}{12}$; **15.** 0,375; **16.** 0,75; **17.** $-0,25$; **18.** $-\dfrac{5}{12}$; **19.** 2; **20.** 0,28; **21.** $\dfrac{1}{3}$; **22.** $-0,28$; **23.** $-\dfrac{8\sqrt{3}}{49}$; **24.** $-\dfrac{7}{8}$; **25.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; **26.** $-\dfrac{7\sqrt{2}}{26}$; **27.** $\sqrt{3}$; **28.** $-4\sqrt{2}$; **29.** $\pi-2,5$; **30.** $4-\pi$; **31.** $6-\pi$; **32.** Не периодическая; **33.** π; **34.** 2π; **35.** $+$; **36.** $-\operatorname{ctg}15°$; **39.** 0,25; **40.** 1; **41.** 1; **42.** 0,5; **43.** 1; **6.** 0; **45.** 3; **46.** 1; **47.** 1; **48.** 0,1; **49.** 1; **50.** 1; **51.** 0,75; **52.** 1; **53.** 0; **54.** 2; **55.** 2; **56.** 1; **57.** 4; **58.** 3; **59.** 2; **60.** 0,5; **61.** 4; **62.** 1; **63.** 0; **64.** 1; **65.** 3; **66.** 1,5; **67.** $\cos^2(\alpha/2)$; **68.** 1,5; **69.** $\dfrac{2}{\sin 6\alpha}$; **70.** -1; **71.** 0; **72.** 1; **73.** 3.

Домашнее задание:

1. 5; **2.** 0,5; **3.** 0,125; **4.** 2; **5.** 5; **6.** $-0,75$; **7.** 1; **8.** 0,7; **9.** $-\dfrac{4}{3}$; **10.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; **11.** $\dfrac{1}{2}(3-\sqrt{5})$; **12.** 1; **13.** $-\dfrac{5}{\sqrt{26}}$; **14.** $\sqrt{5}+4\sqrt{2}$; **15.** $\pi-4$; **16.** 60; **17.** 20π; **18.** 0; **20.** 3; **21.** 1; **22.** 0; **23.** 0; **24.** 1; **25.** 2; **26.** 1; **27.** 0; **28.** $\dfrac{1}{2\sin 2\alpha}$; **29.** $\operatorname{tg}4\alpha$; **30.** 42.

8. Тригонометрические уравнения и неравенства

Решение простейших тригонометрических уравнений: $\sin x=a$, $\cos x=a$, $tg\, x=a$, $ctg\, x=a$. *Основные типы тригонометрических уравнений и методы их решения: метод дополнительного угла; замена переменной в уравнениях вида* $R(\cos x+\sin x, \cos x\cdot\sin x)=0$*; понижение степени уравнения переходом к кратным углам; однородные тригонометрические уравнения; выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции. Тригонометрические неравенства.*

8.1. Справочный материал

К определению тригонометрических уравнений подходят по-разному. Назовем тригонометрическим уравнением равенство тригонометрических выражений, содержащих неизвестное (переменную) только под знаком тригонометрических функций. Уравнения вида $\cos 3x=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}$, $\sin x=\dfrac{1}{2}x$, $\operatorname{tg}2x=x$ и т. д. не являются тригонометрическими. Они относятся к типу трансцендентных уравнений и, как правило, решаются приближенно или графически. Может случиться так, что уравнение не является тригонометрическим по определению, но может быть сведено к тригонометрическому. Например, $2(x-6)\cos 2x=x-6$. Мы видим, что $x-6$ не содержится под знаком тригонометрических функций, однако оно решается аналитически: $(x-6)(2\cos 2x-1)=0$, откуда $x=6$ или $\cos 2x=\dfrac{1}{2}$, $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+n\pi$, где $n\in\mathbb{Z}$. При решении тригонометрических уравнений мы будем использовать известные формулы тригонометрии. Для решения различных видов тригонометрических уравнений необходимо уметь решать простейшие тригонометрические уравнения. Рассмотрим решения тригонометрических уравнений некоторых видов.

Уравнение вида $\sin x = a$

Уравнение $\sin x = a$ может иметь решение только при $|a| \leqslant 1$. Известно, что решение этого уравнения находят по формуле

$$x = (-1)^n \arcsin a + n\pi,$$

где $n \in \mathbb{Z}$ и $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \arcsin a \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Полезно помнить, что $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

Частные случаи

$\sin x = 1, \quad x = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi, \ \ n \in \mathbb{Z}$

$\sin x = -1, \quad x = -\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi, \ \ n \in \mathbb{Z}$

$\sin x = 0, \quad x = n\pi, \ \ n \in \mathbb{Z}.$

Уравнение вида $\cos x = a$

Уравнение $\cos x = a$ может иметь решение только при $|a| \leqslant 1$. Решение данного уравнения находят по формуле

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n,$$

где $n \in \mathbb{Z}$ и $0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi$. Нужно знать, что $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Частные случаи

$\cos x = 0, \quad x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi, \ \ n \in \mathbb{Z}$

$\cos x = 1, \quad x = 2n\pi, \ \ n \in \mathbb{Z}$

$\cos x = -1, \quad x = \pi + 2n\pi, \ \ n \in \mathbb{Z}.$

Уравнение вида $\operatorname{tg} x = a$*, где* $a \in \mathbb{R}$

Известно, что решения данного уравнения находят по формуле

$$x = \operatorname{arctg} a + n\pi,$$

где $n \in \mathbb{Z}$. Необходимо помнить, что $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$.

Уравнение вида $\operatorname{ctg} x = a$*,* $a \in \mathbb{R}$

Известно, что решения данного уравнения находят по формуле

$$x = \operatorname{arcctg} a + n\pi,$$

где $n \in \mathbb{Z}$ и $0 < \operatorname{arcctg} a < \pi$. Полезно помнить, что $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$.

Уравнения, сводимые к алгебраическим

Это уравнения, сводимые к одной и той же функции относительно одного и того же неизвестного выражения, входящего только под знак функции.

Тригонометрические уравнения

$$a\sin^2 x+b\sin x+c=0, \qquad a\cos^3 x+b\cos x+c=0;$$

$$a\,\mathrm{tg}^4\,3x+b\,\mathrm{tg}^3\,3x+c=0, \qquad a\,\mathrm{ctg}^2\,2x+b\,\mathrm{ctg}\,2x+c=0$$

уже сведены к алгебраическим. Действительно, положив в них соответственно

$$\sin x=y, \qquad \cos x=z, \qquad \mathrm{tg}\,3x=t, \qquad \mathrm{ctg}\,2x=u,$$

получим алгебраические уравнения

$$ay^2+by+c=0, \qquad az^3+bz+c=0;$$

$$at^4+bt^2+c=0, \qquad au^2+bu+c=0.$$

Решив каждое из них, найдем $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\,3x$, $\mathrm{ctg}\,2x$.

Уравнения $a\sin^2 x+b\cos x+c=0$, $a\,\mathrm{tg}\,x+b\,\mathrm{ctg}\,x=0$ не являются по виду алгебраическими, но их можно свести к алгебраическим: $a\cos^2 x-b\cos x-(a+c)=0, a\,\mathrm{tg}\,x+\dfrac{b}{\mathrm{tg}\,x}=0.$

Однородные уравнения

Уравнения

$$a\ \sin x+b\cos x=0; \qquad a\ \sin^2 x+b\sin x\cdot\cos x+c\ \cos^2 x=0,$$

$$a\ \sin^3 x+b\sin^2 x\cdot\cos x+c\ \sin x\cdot\cos^2 x+d\cos^3 x=0 \qquad \text{и т. д.}$$

называют однородными относительно $\sin x$ и $\cos x$. Сумма показателей степеней при $\sin x$ и $\cos x$ у всех членов такого уравнения одинакова. Делением на $\cos^k x$, где k-степень однородного уравнения, уравнение приводится к алгебраическому относительно функции $\mathrm{tg}\,x$.

Рассмотрим уравнение

$$a\sin^2 x+b\sin x\cdot\cos x+c\ \cos^2 x=0. \tag{1}$$

Разделим уравнение (1) на $\cos^2 x$, получим

$$a\,\mathrm{tg}^2\,x+b\,\mathrm{tg}\,x+c=0. \tag{2}$$

При $a\neq 0$ (1) и (2) равносильны, так как $\cos x\neq 0$. Если же $\cos x=0$, то из уравнения (1) видно, что и $\sin x=0$, что невозможно, так как теряет смысл тождество $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ ($\sin x$ и $\cos x$ при одном и том же значении x в нуль не обращаются).

Из уравнения (2) определяем значения $\operatorname{tg} x$, а затем находим соответствующие значения x. Очевидно, что при $b^2-4ac<0$ значения $\operatorname{tg} x$ не существуют на множестве $\mathbb{R}$, а потому уравнение (2), а значит и уравнение (1) решений не имеют.

Уравнение

$$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=d \tag{3}$$

в таком виде не является однородным, но его можно привести к однородному, умножив его правую часть на $\sin^2 x+\cos^2 x=1$:

$$a\sin^2 x+b\sin x\cdot\cos x+c\cos^2 x=d(\sin^2 x+\cos^2 x);\quad \text{т. е.}$$

$$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=d\sin^2 x+d\cos^2 x\quad \text{или}$$

$$(a-d)\operatorname{tg}^2 x+b\operatorname{tg} x+(c-d)=0. \tag{4}$$

При $a\neq d$ уравнения (3) и (4) равносильны. Из уравнения (4) находим $\operatorname{tg} x$, а затем соответствующие значения x.

Уравнения, решаемые с помощью условия равенства одноименных тригонометрических функций

Эти уравнения решаются на основании тех условий, которым должны удовлетворять два угла α и β, если а) $\sin\alpha=\sin\beta$, б) $\cos\alpha=\cos\beta$, в) $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta$.

1. Для того чтобы синусы двух углов были равны, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий: разность этих углов равна π, умноженному на четное число, или сумма равна π, умноженному на нечетное число.

2. Для того чтобы косинусы двух углов были равны, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий: разность этих углов равна π, умноженному на четное число, или сумма равна π, умноженному на четное число.

3. Для того чтобы тангенсы двух углов были равны, необходимо и достаточно одновременное выполнение двух условий: тангенс каждого угла существует и разность этих углов равна π, умноженному на целое число.

Уравнения вида $a\sin x+b\cos x=c$

Здесь a, b, c – любые действительные числа. Если $a=b=0, c\neq 0$, то уравнение не имеет решения; если $a=b=c=0$, то x – любое действительное число. Простейшие уравнения этого типа нам уже встречались.

Рассмотрим уравнение $a\sin x+b\cos x=c$ с произвольными коэффициентами и способы их решения.

1-й способ. Введение вспомогательного угла.

Если $a^2+b^2=1$, то существует такой угол φ, что $a=\cos\varphi$, $b=\sin\varphi$ или наоборот. Для решения уравнения $a\sin x+b\cos x=c$ вынесем за скобки выражение $\sqrt{a^2+b^2}$. Получим $\sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)=c$. Поскольку

$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, то первое число $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ можно принять за косинус некоторого угла φ, а второе $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ — за синус того же угла. В таком случае уравнение примет вид

$$\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)=c, \tag{5}$$

откуда $\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Это уравнение имеет решение, если $a^2+b^2\geqslant c^2$, тогда $x=(-1)^n\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+n\pi-\varphi, n\in\mathbb{Z}$. Угол φ находят из равенства $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{b}{a}$, откуда $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

2-й способ. Метод рационализации.

Вводится вспомогательное неизвестное так, чтобы после подстановки получилось рациональное уравнение относительно этого неизвестного. Уравнение $a\sin x+b\cos x=c$ можно переписать так:

$$a\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+b\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=c.$$

Положим $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, тогда получим

$$a\frac{2t}{1+t^2}+b\frac{1-t^2}{1+t^2}=c.$$

Это уравнение рациональное относительно t. Если $b+c\neq 0$, получим, что $t_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}$. Значения t — действительные, если $a^2+b^2\geqslant c^2$. Выражение для вспомогательного неизвестного $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не имеет смысла при $x=(2n+1)\pi$. Поэтому надо следить, чтобы решения вида $x=(2n+1)\pi$ не были потеряны.

3-й способ.

Запишем уравнение в виде

$$2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+b\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=c\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right),$$

т. е. имеем однородное уравнение, которое можно решать стандартным методом.

Уравнения вида $R(\sin x\pm\cos x, sinx\cdot\cos x)$, где R некоторая рациональная функция

Уравнения такого вида сводятся к обычным рациональным уравнениям с помощью подстановки $t=\sin x\pm\cos x$. Действительно, в этом случае

$$t^2=\sin^2 x\pm 2\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x=1\pm 2\sin x\cdot\cos x.$$

Отсюда $\sin x\cdot\cos x=\pm\frac{t^2-1}{2}$.

Тригонометрические неравенства

Тригонометрические неравенства обычно решают следующим образом. Сначала находят ОДЗ. Затем решают соответствующее тригонометрическое уравнение, потом с помощью метода интервалов расставляют знаки на промежутках, на которые делится ОДЗ решениями тригонометрического уравнения.

Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

Если уравнение содержит одну обратную тригонометрическую функцию $f(x)$ (от одного аргумента x), то делают замену переменных $y=f(x)$. Решают полученное уравнение, получают некоторые значения $y_1, \ldots, y_n$. Затем решают простейшие уравнения $f(x)=y_1$, $\ldots$, $f(x)=y_n$.

Если в уравнение входят выражения, содержащие разные аркфункции, или эти аркфункции зависят от разных аргументов, то сведение уравнения к алгебраическому следствию осуществляется обычно вычислением некоторой тригонометрической функции от обеих частей уравнения. Получающиеся при этом посторонние корни отделяются проверкой.

Если в качестве прямой функции выбираются тангенс или котангенс, то решения, не входящие в область определения этих функций, могут быть потеряны. Поэтому перед вычислением значений тангенса или котангенса от обеих частей уравнения следует убедится в том, что среди точек, не входящих в область определения этих функций, нет корней исходного уравнения.

8.2. Примеры

Пример 1. Решить уравнение $\cos\dfrac{5}{6}x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. $\dfrac{5}{6}x=\pm\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}+2\pi n$, $\dfrac{5}{6}x=\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$, $x=\pm\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{12}{5}n\pi, n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $x=\pm\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{12}{5}n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$2\sin^2 x-7\cos x-5=0.$$

Решение. $2(1-\cos^2 x)-7\cos x-5=0$, $2\cos^2 x+7\cos x+3=0$.

Обозначим $\cos x=y$, получим квадратное уравнение $2y^2+7y+3=0$. Далее $y_1=-3$, $y_2=-\dfrac{1}{2}$. Исходное уравнение заменяем совокупностью двух уравнений. Первое $\cos x=-3$ (нет решений), второе $\cos x=-\dfrac{1}{2}$, его решение: $x=\pm\dfrac{2}{3}\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $x=\pm\dfrac{2}{3}\pi+2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$.

Пример 3. Решить уравнение

$$2\sin x-3\cos x=0.$$

Решение. Разделим обе части уравнения на $\cos x$ ($\cos x \neq 0$, так как одновременно $\cos x$ и $\sin x$ в 0 не обращаются): $2\,\mathrm{tg}\, x - 3 = 0$ и $\mathrm{tg}\, x = \frac{3}{2}$, $x = \mathrm{arctg}\,\frac{3}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \mathrm{arctg}\,\frac{3}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 4. Решить уравнение

$$\sin\left(8x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos x.$$

Решение.

Заменим уравнение равносильным:

$$\sin\left(8x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right),$$

воспользуемся условием 1 (равенства синусов), получим

$$8x - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} + x = 2k\pi, \quad x = \frac{2}{27}\pi(3k+1), \quad k \in \mathbb{Z}$$

или

$$8x - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} - x = (2k+1)\pi, \quad x = \frac{2}{21}\pi(3k+1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{2}{27}\pi(3k+1)$, $x = \frac{2}{21}\pi(3k+1), k \in \mathbb{Z}$.

Пример 5. Найти $\frac{x_1}{\mathrm{tg}^2\, x_2}$, где x_1 — наименьший, а x_2 — наибольший из корней уравнения $\sin^2 x + \frac{3}{2}\cos^2 x = \frac{5}{2}\sin x \cdot \cos x$, принадлежащих отрезку $[180^0;\, 360^0]$.

Решение. Поделим обе части уравнения на $\cos^2 x$ и обозначим $y = \mathrm{tg}\, x$. Решая квадратное уравнение $y^2 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}y$, получим $y_1 = 1$ и $y_2 = \frac{3}{2}$. Из уравнения $\mathrm{tg}\, x = 1$ находим $x = 45^0 + 180^0 \cdot n$. В промежутке $[180^0;\, 360^0]$ лежит только один из корней: $n = 1$, $x = 225^0$.

Из уравнения $\mathrm{tg}\, x = \frac{3}{2}$ находим $x = \mathrm{arctg}\,\frac{3}{2} + 180^0 \cdot n$. В промежутке $[180^0;\, 360^0]$ лежит $x = \mathrm{arctg}\,\frac{3}{2} + 180^0$. Ясно, что $\mathrm{arctg}\, 1 < \mathrm{arctg}\,\frac{3}{2}$ (в силу монотонности функции $y = \mathrm{arctg}\, x$). Тогда $x_1 = 225^0$, а $x_2 = \mathrm{arctg}\,\frac{3}{2}$, поэтому $\frac{225^0}{[\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,\frac{3}{2} + 180^0)]^2} = \frac{225^0}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 100^0$.

Ответ: 100^0.

Пример 6. Найти сумму корней уравнения $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$, принадлежащих интервалу $(90^0;\, 270^0)$.

Решение. Решим методом вспомогательного угла.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x = 1;$$

$$\sin 3x \cdot \cos 45^0 + \cos 3x \cdot \sin 45^0 = 1; \quad \sin(3x + 45^0) = 1,$$

отсюда $3x+45^0=90^0+360^0\cdot n$ и $x=15^0+120^0\cdot n$. Интервалу $(90^0;\ 270^0)$ принадлежат корни $x_1=135^0$(при n=1) и $x_2=255^0$(при n=2).

Ответ: 390^0.

Пример 7. Решить неравенство

$$2\sin^2 x-7\sin x+3>0$$

на промежутке $[-\pi,\pi]$.

Решение. Пусть $f(x)=2\sin^2 x-7\sin x+3$. Решаем сначала уравнение

$$2\sin^2 x-7\sin x+3=0.$$

Обозначая $\sin x=y$, получим

$$2y^2-7y+3=0.$$

Его решения $y_1=1/2$, $y_2=3$. Уравнение $\sin x=3$ решений не имеет, а уравнение $\sin x=1/2$ имеет на промежутке $[-\pi,\pi]$ решения $\pi/6$, $5\pi/6$.

Разбиваем этими точками промежуток $[-\pi,\pi]$ на три промежутка. На множестве $[-\pi,\pi/6)$ функция $f(x)>0$, так как $f(0)=3>0$. На множестве $(\pi/6;5\pi/6)$ функция $f(x)<0$, так как $f(\pi/2)=-2<0$. На множестве $(5\pi/6,\pi]$ функция $f(x)>0$, так как $f(\pi)=3>0$.

Ответ: $[-\pi,\pi/6)\cup(5\pi/6,\pi]$.

Пример 8. Решить уравнение

$$\arcsin x=\arccos x.$$

Решение. Вычислим синус от левой и правой части уравнения. Так как $\sin(\arccos x)\geqslant 0$, то получим

$$x=\sqrt{1-x^2}.$$

Отсюда $x^2=\dfrac{1}{2}$, $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Производим проверку:

$$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2},$$

а

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4},\quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Пример 9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sin x\cos y=0,25,\\ 3\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} y.\end{cases}$$

Решение. Найдем ОДЗ: $\cos x \neq 0$, $\cos y \neq 0$. Откуда имеем: $x \neq \pi/2+\pi k$, $y \neq \pi/2+$ $+\pi n$ $(k, n \in \mathbb{Z})$. Преобразуем второе уравнение системы

$$3\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sin y}{\cos y},$$

умножив обе части на $\cos x \cos y \neq 0$. Получим равносильную систему

$$\begin{cases}\sin x \cos y = 0,25,\\ 3\sin x \cos y = \sin y \cos x.\end{cases}$$

Используя первое уравнение, заменим левую часть второго на 0,75. В итоге имеем

$$\begin{cases}\sin x \cos y = 0,25,\\ \sin y \cos x = 0,75.\end{cases}$$

Сложив уравнения системы, а затем вычтя из первого уравнения второе, получим систему, равносильную последней:

$$\begin{cases}\sin x \cos y + \sin y \cos x = 0,25+0,75,\\ \sin x \cos y - \sin y \cos x = 0,25-0,75.\end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases}\sin(x+y) = 1,\\ \sin(x-y) = -0,5.\end{cases}$$

Из первого уравнения находим $x+y=\pi/2+2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$. Прежде чем переходить ко второму уравнению, заметим, что при решении систем тригонометрических уравнений, как правило, неудобно пользоваться общими формулами, которые мы привели для уравнений $\sin x = =a, \quad \cos x = a$.

Целесообразно каждое из таких уравнений решать с помощью числовой окружности (это первая специфическая особенность, о которой говорилось выше).

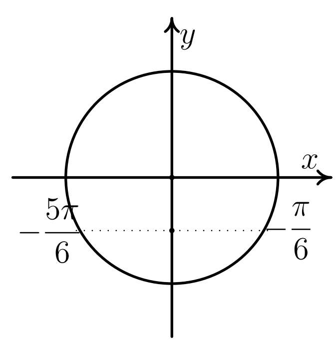

Рис. 12. Сегмент

Итак, рассмотрим уравнение $\sin(x-y)=-0,5$. С помощью числовой окружности находим либо $x-y=-\pi/6+2\pi l$, либо $x-y=-5\pi/6+2\pi l$ (рис. 12). Таким образом, задача сводится к решению совокупности двух линейных систем с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, \\ x-y=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi l; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, \\ x-y=-\dfrac{5}{6}\pi+2\pi l. \end{cases}$$

Из этих систем находим соответственно два семейства решений:

$$\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6}+\pi(k+l), \\ y=\dfrac{\pi}{3}+\pi(k-l); \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{6}+\pi(k+l), \\ y=\dfrac{2\pi}{3}+\pi(k-l) \quad (k,l\in\mathbb{Z}). \end{cases}$$

Легко видеть, что они принадлежат ОДЗ (ни x, ни y не равны $\pi/2+\pi k, k\in\mathbb{Z}$).
Ответ:

$$\left(\frac{\pi}{6}+\pi(k+l),\quad \frac{\pi}{3}+\pi(k-l)\right),\quad \left(-\frac{\pi}{6}+\pi(k+l),\quad \frac{2}{3}\pi+\pi(k-l)\right),\quad k,l\in\mathbb{Z}.$$

Заметим, что при решении систем тригонометрических уравнений существенно использование различных обозначений для целых параметров $(l,k,\ldots\in\mathbb{Z})$ в записи решения первого и второго уравнений системы (это вторая из специфических особенностей).

Пример 10. Решить неравенство $\cos x\leqslant\dfrac{1}{3}$ с помощью тригонометрической окружности.

Решение. По определению $\cos x$ — это абсцисса точки числовой окружности, соответствующей числу x. Отметим на окружности точки, имеющие абсциссу, равную $\dfrac{1}{3}$ (точки M и P на рис. 13). Тогда геометрическим решением неравенства $\cos x\leqslant\dfrac{1}{3}$ является замкнутая дуга MP (точки этой дуги имеют абсциссу $\leqslant\dfrac{1}{3}$).

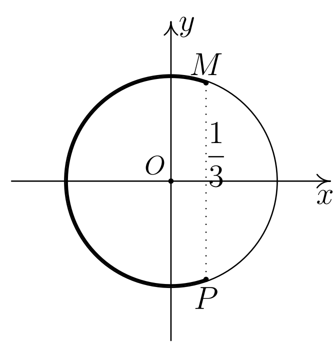

Рис. 13. $\cos x\leqslant\dfrac{1}{3}$

Составим аналитическую запись дуги MP с учетом периодичности функции $y=\cos x$, $T=2\pi$: $\arccos\dfrac{1}{3}+2\pi k\leqslant x\leqslant 2\pi-\arccos\dfrac{1}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{1}{3}+2\pi k\leqslant x\leqslant 2\pi-\arccos\dfrac{1}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

8.3. Аудиторные задачи

Решить уравнения, найти корни, расположенные на заданных промежутках, ответы привести в градусах:

1. $\cos^2 x + 3\cos x = 0$ на $[0°, 90°]$.

2. $\cos x \sin x = \dfrac{1}{4}$ на $[0°, 45°]$.

3. $\sin 3x + \sin x = 2\sin 2x$ на $[90°, 180°]$.

4. $\sin x = \sin 3x$ на $(0°, 90°)$.

5. $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$ на $(0°, 45°)$.

Решить уравнения:

6. $\sin(15° + x) + \sin(45° - x) = 1$.

7. $1 - \sin 3x = \left(\sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2}\right)^2$.

8. $\sin 4x = \cos(180° - 2x)$.

9. $3\sin x + 2\cos x = 0$.

10. $\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}$.

Найти число корней уравнения, принадлежащих заданному промежутку:

11. $\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg} x$ на $[0°, 45°)$.

12. $\cos 2x - 2\sin^2 x = -3$ на $[-180°, 180°]$.

13. $\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{ctg}^2 x = 4$ на $(120°, 180°)$.

Решить уравнения:

14. $\sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x = 0$.

15. $\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 3\cos^2 x$.

16. $\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2$.

17. $2\cos 2x + 2\operatorname{tg}^2 x = 5$.

18. $\sin\left(8x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin x$.

19. $\sin^2 x + \dfrac{3}{2}\cos^2 x = \dfrac{5}{4}\sin 2x$.

20. $\sin x + \cos x - 1 = \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}(\cos x - 1)$.

21. $3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 5\cos^2 x = 2$.

22. $1 + \cos x + \sin x = 0$.

23. $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x} = 2\sqrt{2}$.

Решить уравнения, найти корни, расположенные на заданных промежутках, ответ привести в градусах:

24. $\operatorname{ctg} 5x = \operatorname{ctg} 2x$ на $(0°, 90°)$.

25. $2 + \sin x \cos x = 2\sin x + \cos x$ на $(0°, 180°)$.

26. $\cos 7x = \cos 5x + \sin x$ на $(-20°, 0°)$.

27. $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 3x = 0$ на $(0°, 50°)$.

28. $\sqrt{3}\sin x = \cos x$ на $(180°, 270°)$.

29. $\sin 5x \cos 3x - \sin 8x \cos 6x = 0$ на $[60°, 65°]$.

30. $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 3 = 0$ на $(-60°, 0°)$.

31. $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x = 0$ на $[0°, 180°)$.

32. $\sin 3x = \sin 2x + \sin x$ на $(90°, 180°)$.

33. $\operatorname{tg} x \cos x + \operatorname{tg} x = \cos x + 1$ на $[0°, 45°]$.

34. Найти наименьший положительный корень (в градусах) уравнения

$$\cos 8x = 1 - 3\cos 4x.$$

35. Найти сумму всех корней уравнения

$$\sqrt{\pi^2 - x^2}(3\sin 2x + 5 - 7\sin x - 7\cos x) = 0.$$

36. Найти сумму всех корней уравнения $\operatorname{ctg} 2x + \operatorname{tg} 7x = 0$ на промежутке $[0; \pi]$.

Решить уравнения, указать количество различных корней, находящихся на заданных промежутках:

37. $\dfrac{\cos^2 2x}{1 + \cos(90^\circ - 2x)} = 2(\sin^{-2} 2x - 1)$ на $[0^\circ, 180^\circ]$.

38. $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ на $(-90^\circ, 0^\circ)$.

39. $(\sin x + \cos x)^4 + (\sin x - \cos x)^4 = 4 - 2\sin^2 2x$ на $[0^\circ, 180^\circ]$.

40. $2 + 2\cos(180^\circ - 2x) = \sqrt{3}\operatorname{tg} x$ на $[0^\circ, 180^\circ]$.

41. $2\sin^2 x - 5\cos x - 4 = 0$ на $[-3\pi; 2\pi]$.

Решить неравенства на заданных промежутках:

42. $\cos x < \dfrac{1}{2}$ на $[-2\pi, 0]$.

43. $\sin x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ на $[\pi/2, 3\pi/2]$.

44. $\sin 2x + 2\sin x > 0$ на $[0, 2\pi]$.

45. $(1 - \cos x)(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) < 0$ на $(-\pi/2, \pi/2)$.

46. $\sqrt{5 - 2\sin x} \geqslant \sin x - 1$ на $(-\pi, 0)$.

47. Найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$|\cos x| < \frac{1}{2}.$$

48. Решить уравнение

$$\sqrt{\sin(\pi(x + 0,5)) - 1} = 5x + 4x^2 - x^3.$$

49. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$$

50. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{2\pi}{3}, \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = 2. \end{cases}$$

51. Решить уравнение

$$\arcsin 6x + \arcsin 6\sqrt{3}x = -\frac{\pi}{2}.$$

52. Найти a, при которых уравнение

$$(4a+x)\arcsin x=0$$

имеет ровно один корень.

53. Решить неравенство

$$2\sin^2 x-7\sin x+3>0.$$

54. Для каждого значения параметра a решить уравнение

$$\sin x+\cos(a+x)+\cos(a-x)=2.$$

55. Найти a, при которых уравнение

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=8a\sin 2x$$

имеет хотя бы один корень.

56. Найти значения параметра a, для которых уравнение

$$\sqrt{2}\sin x-a\cos x=2$$

не имеет решений.

57. Найти значения параметра a, для которых уравнение

$$\sqrt{3}\sin x+a\cos x=2$$

имеет хотя бы одно решение.

58. Найти значения параметра a, для которых неравенство

$$\frac{1}{2}\sin x-a\cos x\leqslant 2$$

справедливо для всех значений аргумента.

59. Найти значения параметра a, для которых неравенство

$$a\sin x+\sqrt{3}\cos x<-2$$

не имеет решений.

60. Найти сумму коэффициентов и свободного члена приведенного квадратного уравнения, корнями которого являются $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, удовлетворяющие соотношению

$$\sin\alpha+\cos\alpha=0,5.$$

8.4. Домашнее задание

Решить уравнения:

1. $2\cos x=\sqrt{2+2\sin 2x}$.

2. $\sin 3x=\cos x$.

3. $2\sin 2x(\sqrt{3}\sin x+\cos x)=3\sin^2 x-\cos^2 x$.

4. $\cos^2\dfrac{x}{3}+2\sin^3\dfrac{x}{3}=1.$

5. $\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} 3x+\operatorname{tg} 5x=0.$

Решить уравнения, найти корни, расположенные на заданных промежутках, ответ привести в градусах:

6. $\operatorname{ctg} x+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=2$ на $(90^\circ, 180]$.

7. $\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}+1=\cos x$ на $[-90^\circ, 0^\circ)$.

8. $2\sin 5x\cos 6x+\sin x=\sin 7x\cos 4x$ на $[40^\circ, 45^\circ]$.

9. $4\sin x\sin 2x\sin 3x=\sin 4x$ на $(0^\circ, 30^\circ)$.

10. $\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}=1+\sin 2x$ на $(-90^\circ, 0^\circ)$.

11. Найти наибольший отрицательный корень (в градусах) уравнения

$$\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin 2x-2\cos^2 x=0.$$

12. Найти сумму всех корней уравнения $\operatorname{ctg} 7x-\operatorname{ctg} 4x=0$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

Решить уравнения, указать количество различных корней, находящихся на заданных промежутках:

13. $3\sin^2(270^\circ+x)=\sin^2(180^\circ+x)+\sin(180^\circ-2x)$ на $[-180^\circ, 180^\circ]$.

14. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)+\sin(\pi+3x)+\sin 8x=\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi+2x\right)$ на $[0, \pi]$.

15. $3\cos^2 x-8\sin x=0$ на $\left[0; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

16. Решить уравнение

$$\sqrt{\sin\pi(x-0,5)-1}=x^3+2x^2-3x.$$

17. Решить неравенство

$$\sin\left(\frac{4\pi}{3}\cos x\right)\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$$

на промежутке $[0, \pi]$.

18. Найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$|\sin x|<\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

19. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}=\operatorname{tg} y, \\ x-y=\dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$$

20. Найти a, при которых уравнение

$$(a-2x)\arccos(x-1)=0$$

имеет ровно один корень.

21. Решить уравнение

$$2\arcsin^2 x - \arcsin x - 6 = 0.$$

22. Найти a, при которых уравнение

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 6a \sin 2x$$

имеет хотя бы один корень.

23. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sin^2 4x + (a^2 - 3)\sin 4x + a^2 - 4 = 0$$

имеет 4 корня, расположенных на отрезке $[3\pi/2, 2\pi]$?

24. Найти значения параметра a, для которых уравнение

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = a$$

не имеет решений.

25. Найти значения параметра a, для которых неравенство

$$\frac{1}{2}\sin x + \cos x \geqslant a$$

справедливо для всех значений аргумента.

8.5. Проверочный тест

1. Сумма корней уравнения

$$1 - \sin 5x = \left(\cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{3x}{2}\right)^2,$$

принадлежащих отрезку $[180°, 270°]$, равна

1) $360°$; 2) $225°$; 3) $630°$; 4) $222°$; 5) $370°$.

2. Число целых решений неравенства

$$\cos x < -0,5\sqrt{2},$$

принадлежащих промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, равно

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) 4.

3. Значение $\frac{x_1}{\operatorname{tg} x_2}$, где x_1 — наибольший, а x_2 — наименьший из корней уравнения

$$3\cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0,$$

принадлежащих интервалу $(-90°, 90°)$, равно

1) $15°$; 2) $-15°$; 3) $135°$; 4) $-135°$; 5) $45°$.

4. Число корней уравнения

$$x^3-2x^2-8x=\sqrt{\cos\pi(x+1)-1}$$

равно

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 0.

5. Число различных корней уравнения

$$(1+\cos 4x)\sin 2x=\cos^2 2x$$

на промежутке $(30°, 90°)$ равно

1) 0; 2) 2; 3) 1; 4) 3; 5) 5.

6. Наименьший корень уравнения

$$7\sin^2 x-\sin 2x=5\cos^2 x,$$

принадлежащий промежутку $(-\pi/2, \pi/2)$, есть

1) $-\dfrac{\pi}{4}$; 2) $-\operatorname{arctg}\dfrac{5}{7}$; 3) $\dfrac{\pi}{4}$; 4) $\operatorname{arctg}\dfrac{5}{7}$; 5) 0.

7. Число различных корней уравнения

$$2\cos^2 x+3\sin x=0,$$

принадлежащих интервалу $(-510°, -30°)$, равно

1) 4; 2) 3; 3) 2; 4) 1; 5) 6.

8. Найти значения параметра a, для которых уравнение

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=a$$

не имеет решений.

9. Найти число корней уравнения

$$x^3-2x^2-8x=\sqrt{\cos\pi(x+1)-1}.$$

10. Найти число различных корней уравнения

$$(1+\cos 4x)\sin 2x=\cos^2 2x$$

на промежутке $(30°, 90°)$.

8.6. Ответы

Аудиторные задачи:

1. $90°$; **2.** $15°$; **3.** $90°$, $180°$; **4.** $45°$; **5.** $15°$; **6.** $x=15°+360°n,\ n\in\mathbb{Z}$; **7.** $x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ и $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$; **8.** $x=45°+90°n,\ n\in\mathbb{Z}$ и $x=15°+60°k,\ k\in\mathbb{Z}$; **9.** $x=-\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}+\pi n, \in$

$\mathbb{Z}$; **10.** $x=\frac{3}{8}\pi+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; **11.** 1; **12.** 2; **13.** 1; **14.** $x=\frac{\pi n}{5},\ n\in\mathbb{Z}$ и $x=\frac{\pi k}{7},\ k\in\mathbb{Z}$; **15.** $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ и $x=\operatorname{arctg}3+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; **16.** $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, $x=\frac{\pi}{14}+\frac{\pi k}{7},\ k\in\mathbb{Z}$ и $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi l}{2},\ l\in\mathbb{Z}$; **17.** $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; **18.** $x=\frac{\pi}{21}+\frac{2\pi k}{7},\ k\in\mathbb{Z}$ и $x=\frac{\pi}{27}+\frac{2\pi n}{9},\ n\in\mathbb{Z}$; **19.** $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ и $x=\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; **20.** $x=2\operatorname{arctg}2+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; **21.** $x=\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; **22.** $x=\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; **23.** $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ и $x=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; **24.** 60°; **25.** 90°; **26.** -5°; **27.** 18°; **28.** 210°; **29.** 60°; **30.** -45°; **31.** 0°; **32.** 120°; **33.** 45°; **34.** 15°; **35.** $\frac{\pi}{2}$; **36.** 2π; **37.** 3; **38.** 1; **39.** 4; **40.** 4; **41.** 5; **42.** $(-5\pi/3,-\pi/3)$; **43.** $[\pi/2,2\pi/3)$; **44.** $(0,\pi)$; **45.** $(-\pi/2,0)\cup(0,\pi/3)$; **46.** $(-\pi,0)$; **47.** 2; **48.** 0; **49.** $(\pi/3+\pi(2n+k)/2,\ \pi/6+\pi(k-2n)/2)$, $(\pi/6+\pi(2n+k)/2,\ \pi/3+\pi(k-2n)/2)$, $k,n\in\mathbb{Z}$; **50.** $(\pi/2+\pi k,\ \pi/6-\pi k)$, $k\in\mathbb{Z}$; **51.** $-\frac{1}{12}$; **52.** $a=0$ или $|a|>\frac{1}{4}$; **53.** $x\in(-7\pi/6+2\pi n,\pi/6+2\pi n)$, $n\in\mathbb{Z}$; **54.** При $2\pi k-\pi/6\leqslant a\leqslant\pi/6+2\pi k$ и $5\pi/6+2\pi k\leqslant a\leqslant 7\pi/6+2\pi k$ $x=-\arcsin\frac{2\cos a}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}+(-1)^n\arcsin\frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}+\pi n$, $n,k\in\mathbb{Z}$; **55.** $a\geqslant\frac{1}{4}$; **56.** $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$; **57.** $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$; **58.** $[-2\sqrt{3},2\sqrt{3}]$; **59.** $[-1,1]$; **60.** $1/8$.

Домашнее задание:

1. $x=\frac{\pi}{8}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; **2.** $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbb{Z}$ и $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; **3.** $x=-\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ и $x=\frac{7\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}$; **4.** $x=(-1)^n\frac{3\pi}{2}+3\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ и $x=3\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; **5.** $x=\frac{\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}$; **6.** 150°; **7.** -90°; **8.** 45°; **9.** $22,5^\circ$; **10.** -45°; **11.** -45°; **12.** 4π; **13.** 4; **14.** 15; **15.** 4; **16.** $1,-3$; **17.** $\{\pi\}\cup[\pi/3,\arccos 1/4]$; **18.** 1; **19.** $(5\pi/(24)+\pi k/2,\ \pi/(24)+\pi k/2)$, $k\in\mathbb{Z}$; **20.** $a<0$, $a\geqslant 4$; **21.** $-\sin 1,5$; **22.** $a\geqslant\frac{1}{3}$; **23.** $a=\pm 2$; **24.** $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$; **25.** $(-\infty,-\sqrt{5}/2]$.

9. Преобразование логарифмических и показательных выражений

Логарифмы, десятичные и натуральные логарифмы. Логарифмы произведения, частного, степени и корня. Основное логарифмическое тождество. Переход к новому основанию. Потенцирование. Преобразование показательных выражений. Преобразование смешанных выражений.

9.1. Справочный материал

Свойства степеней.

Для вещественных $a>0, x, y$

1) $a^0=1$;

2) $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$;

3) $a^x a^y=a^{x+y}$;

4) $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$;

5) $(a^x)^y=a^{xy}$;

6) $(ab)^x=a^x b^x$;

7) $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$;

8) $a^{\frac{k}{n}}=\sqrt[n]{a^k}$;

9) $\sqrt{a^2}=|a|$.

Логарифмом числа b ($b>0$) по основанию a ($a>0$; $a\neq 1$) называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получилось b:

$$\log_a b=x \iff a^x=b.$$

Основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a b}=b.$$

Свойства логарифмов

1. $\log_a a=1,\ a\neq 1;\ a>0.$
2. $\log_a 1=0,\ a\neq 1;\ a>0.$
3. $\log_a bc=\log_a b+\log_a c,\ a\neq 1;\ a>0;\ b>0;\ c>0.$
4. $\log_a \dfrac{b}{c}=\log_a b-\log_a c,\ a\neq 1;\ a>0;\ b>0;\ c>0.$
5. $\log_a b^p=p\log_a b,\ a\neq 1;\ b>0;\ a>0.$
6. $\log_{a^q} b=\dfrac{1}{q}\cdot\log_a b,\ a\neq 1;\ b>0;\ a>0;\ q\neq 0.$
7. $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a},\ a\neq 1;\ c\neq 1;\ a>0;\ b>0;\ c>0.$
8. $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a},\ a\neq 1;\ b\neq 1;\ a>0;\ b>0.$

9.2. Примеры

Пример 1. Найти значение выражения $\log_3\log_4\sqrt[9]{4}$.

Решение. Согласно свойству (5) логарифмов имеем $\log_3\log_4\sqrt[9]{4}=\log_3\log_4(4)^{\frac{1}{9}}=\log_3\left(\dfrac{1}{9}\log_4 4\right)$. По свойству (1) логарифмов $\log_4 4=1$, т. е. получим

$$\log_3\left(\frac{1}{9}\log_4 4\right)=\log_3\frac{1}{9}=\log_3 3^{-2}.$$

Используя свойства (5) и (1) логарифмов, имеем

$$\log_3 3^{-2}=-2\log_3 3=-2.$$

Ответ: -2.

Пример 2. Найти значение выражения $(\sqrt[3]{7})^{\frac{3}{\log_2 7}}$.

Решение. Используя свойство (8) логарифмов, перейдем в показателе степени к логарифму по основанию 7:

$$(\sqrt[3]{7})^{\frac{3}{\log_2 7}} = [(7)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{3}{\log_2 7}} = 7^{\frac{1}{\log_2 7}} = 7^{\log_7 2}.$$

По основному логарифмическому тождеству последнее выражение равно 2.

Ответ: 2.

Пример 3. Найти значение выражения

$$\frac{3}{7}(\log_2 32 + 27^{\log_3 4})^{\log_{69} 14}.$$

Решение. Используя свойство (5) логарифмов и основное логарифмическое тождество, преобразуем выражение в круглых скобках:

$$\log_2 32 + 27^{\log_3 4} = \log_2(2^5) + (3^3)^{\log_3 4} = 5\log_2 2 + 3^{3\log_3 4} =$$
$$= 5 + 3^{\log_3 (4)^3} = 5 + 4^3 = 69.$$

Исходное выражение принимает вид $\frac{3}{7}(69^{\log_{69} 14})$. Используя основное логарифмическое тождество, окончательно получим

$$\frac{3}{7}(69^{\log_{69} 14}) = \frac{3}{7} \cdot 14 = 6.$$

Ответ: 6.

Пример 4. Найти значение выражения

$$\frac{3\log_3^2 45 - 2(\log_3 45)(\log_3 5) - \log_3^2 5}{3\log_3 45 + \log_3 5}.$$

Решение. Используя свойства (3) и (5) логарифмов, преобразуем числитель дроби

$$3\log_3^2 45 - 2(\log_3 45)(\log_3 5) - \log_3^2 5 =$$
$$= 3[\log_3(5\cdot 9)]^2 - 2[\log_3(5\cdot 9)](\log_3 5) - \log_3^2 5 =$$
$$= 3[\log_3 5 + \log_3 9]^2 - 2[\log_3 5 + \log_3 9](\log_3 5) - \log_3^2 5 =$$
$$= 3(\log_3 5 + \log_3 3^2)^2 - 2(\log_3 5 + \log_3 3^2)(\log_3 5) - \log_3^2 5 =$$
$$= 3(\log_3 5 + 2)^2 - 2\log_3^2 5 - 4\log_3 5 - \log_3^2 5 = 8\log_3 5 + 12.$$

Таким же образом преобразуем знаменатель дроби

$$3\log_3 45 + \log_3 5 = 3\log_3(5\cdot 9) + \log_3 5 =$$
$$= 3(\log_3 5 + \log_3 9) + \log_3 5 = 3(\log_3 5 + \log_3 3^2) + \log_3 5 =$$
$$= 3(\log_3 5 + 2) + \log_3 5 = 3\log_3 5 + 6 + \log_3 5 = 4\log_3 5 + 6.$$

После упрощения числителя и знаменателя исходное выражение принимает вид

$$\frac{8\log_3 5+12}{4\log_3 5+6}=\frac{2(4\log_3 5+6)}{4\log_3 5+6}=2.$$

Ответ: 2.

Пример 5. Найти $\log_{30} 8$, если известно, что $\lg 5=a$, $\lg 3=b$.
Решение. Представим $\log_{30} 8$ в виде

$$\log_{30} 8=\frac{\lg 8}{\lg 30}.$$

Разлагая числа 30 и 8 на простые множители и используя свойства логарифмов, получаем

$$\log_{30} 8=\frac{3\lg 2}{\lg 5+\lg 3+\lg 2}.$$

Учитывая, что

$$\lg 2=\lg\frac{10}{5}=1-\lg 5$$

и используя условие задачи, получаем

$$\log_{30} 8=\frac{3(1-a)}{b+1}.$$

Ответ: $\dfrac{3(1-a)}{b+1}$.

9.3. Аудиторные задачи

Найти значения выражений:

1. $\log_3 72-\log_3\dfrac{16}{27}+\log_3 18$.

2. $7^{\log_{7\sqrt{7}} 27}$.

3. $\log_3^2\log_{\frac{1}{5}}\dfrac{1}{125}$.

4. $\log_{\frac{2}{3}}\log_{343} 49$.

5. $\log_{\frac{8}{27}}\log_{25} 125$.

6. $6^{\frac{2}{\log_5 6}}$.

7. $\log_{16}\log_3\sqrt[8]{\sqrt[3]{27}}$.

8. $\left(5-5^{\frac{1}{\log_3 5}}\right)^{\log_{\sqrt{8}} 5}$.

9. $49^{\frac{1}{2\log_9 7}}$.

10. $\dfrac{2\log_3 63}{\log_{81} 3}-\dfrac{4\log_3 7}{\log_9 3}$.

11. $(0,8)^{1/(3\log_{27}4)}\cdot 5^{1/(3\log_{27}4)}$.

12. $\log_3[(\log_2 5)(\log_5 8)]$.

13. $8^{\log_2\sqrt[3]{\sqrt{5}+3}}-3^{\log_9(\sqrt{5}-3)^2}$.

14. $\log_{1/4}\dfrac{16}{13+2\sqrt{42}}+\log_2\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$.

15. $5^{\log_{\sqrt{5}}\sqrt{7+\sqrt{21}}+\log_{1/5}(\sqrt{7}+\sqrt{3})}$.

16. $0,25(1+4^{\log_2 5})^{\log_{26}4}$.

17. $64^{-(\log_{\frac{1}{3}}2)(\log_{\frac{1}{4}}9)+4}$.

18. $9^{3-\log_3 54}+7^{-\log_7 2}$.

19. 2^x+2^{-x}, если $4^x+4^{-x}=34$.

20. $\dfrac{2\log_3 12-4\log_3^2 2+\log_3^2 12+4\log_3 2}{3\log_3 12+6\log_3 2}$.

21. $\dfrac{2\log_3^2 2-\log_3^2 18-(\log_3 2)(\log_3 18)}{2\log_3 2+\log_3 18}$.

22. $\log_6^2 3+\dfrac{\log_6 18}{\log_2 6}$.

23. Вычислить

$$3\log_{\frac{a^3}{b}}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}}+\log_{\frac{a^3}{b}}b,$$

если известно, что $\log_a b=2$.

24. Найти $\log_{30}120$, если $\log_2 3=a$, $\log_3 5=b$.

25. Вычислить $\log_{\sqrt{3}}\sqrt[6]{0,6}$, если $\log_{5,4}27=a$.

26. Вычислить $\log_{1,25}3,2m^a$, если $\log_m 5=c$, $\log_m 4=a$.

Найти значения выражений:

27. $\left(2^{2+\frac{1}{\log_3 2}}+25^{\frac{1}{2\log_3 5}}+1\right)^{\frac{1}{2}}$.

28. $3^{\frac{1}{\log_5 3}}\cdot 3^{\log_3^2 4}-5\cdot 4^{\log_3 4}+\lg 0,1$.

29. $\dfrac{24^{\sqrt{\log_{24}4}}}{4^{\sqrt{\log_4 24}}}$.

30. $(\log_3 2+\log_2 81+4)(\log_3 2-2\log_{18}2)\log_2 3-\log_3 2$.

31. Найти значение выражения $\log_{(27\sqrt[4]{y})}\left(\dfrac{9}{x^6}\right)$, если $a=\log_3 x$ и $b=\log_x y$.

32. Доказать, что

$$\lg\frac{a+b}{3}=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b),$$

если $a^2+b^2=7ab$, $a>0$, $b>0$.

9.4. Домашнее задание

Найти значения выражений:

1. $\log_4 \dfrac{1}{5} + \log_4 36 + \dfrac{1}{2} \log_4 \dfrac{25}{81}$.

2. $\log_9^3 \log_2 8$.

3. $(\sqrt{5})^{\frac{2}{\log_9 5}}$.

4. $10^{3-\lg 4} - 49^{\log_7 15}$.

5. $9^x + 9^{-x}$, если $3^x + 3^{-x} = 3$.

6. $25^{\log_{125} 9 \cdot \log_{\sqrt[3]{3}} 2}$.

7. $\log_{3\sqrt{3}} \log_2 \sqrt[6]{\sqrt{16}}$.

8. $\dfrac{\log_5^2 7\sqrt{5} + 2\log_5^2 7 - 3(\log_5 7\sqrt{5})(\log_5 7)}{\log_5 7\sqrt{5} - \log_5 49}$.

9. $20^{1/(2\log_{81} 5)} \cdot (0,25)^{1/(2\log_{81} 5)}$.

10. $\dfrac{3\log_3 54}{\log_{81} 3} - \dfrac{4\log_3 6}{\log_{27} 3}$.

11. $\log_{12}^2 2 + \dfrac{\log_{12} 24}{\log_6 12}$.

12. $3^{\log_{\sqrt{3}} \sqrt{5-\sqrt{3}}} + 2^{\log_4 (1-\sqrt{3})^2}$.

13. $4^{\log_2 \sqrt{6-\sqrt{30}} + \log_{1/4}(\sqrt{6}-\sqrt{5})}$.

14. $\log_{1/25} \dfrac{1}{9+2\sqrt{14}} + \log_5 \dfrac{125}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$.

15. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 3} \cdot 7^{\log_7^2 2} - 9 \cdot 2^{\log_7 2} + 3^{\log_9 4}$.

16. $5^{\sqrt{\log_5 4}} - 4^{\sqrt{\log_4 5}} + 1$.

17. Вычислить

$$\log_{\frac{\sqrt{b}}{a^2}} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{b}} + \frac{1}{4} \log_{\frac{\sqrt{b}}{a^2}} b\sqrt{a},$$

если известно, что $\log_a b = 14$.

18. Вычислить $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{2,7}$, если $\log_{0,1} 27 = a$.

19. Найти значение выражения $\log_{(8\sqrt[4]{y})} \left(\dfrac{4}{x^6}\right)$, если $a = \log_2 x$ и $b = \log_x y$.

20. Доказать, что

$$\log_{a+b} m + \log_{a-b} m = 2\log_{a+b} m \log_{a-b} m,$$

если известно, что $m^2 = a^2 - b^2$.

9.5. Проверочный тест

1. Значение выражения

$$\frac{5^{-\log_{\sqrt{5}}(\sqrt[4]{3})}}{9^{1+\log_{0,5} 2}}$$

равно

1) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$; 2) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\dfrac{\sqrt[4]{27}}{9}$; 4) $\dfrac{\sqrt[4]{3}}{3}$; 5) $\dfrac{1}{3}$.

2. Если $\log_a 2 = m$, а $\log_a 3 = n$, то $\log_{12} 13,5a^n$ равен

1) $\dfrac{4n}{m+n}$; 2) $\dfrac{4n-m}{n+2m}$; 3) $\dfrac{n-m}{n+2m}$; 4) $\dfrac{4n-m}{m+n}$; 5) 1.

3. Если $\log_{0,1} 27 = a$, то $2\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{2,7}$ равен

1) $\dfrac{2}{a}$; 2) $2+\dfrac{2}{a}$; 3) a; 4) $1+a$; 5) $2a$.

4. Значение выражения

$$\frac{2\log_3 12 - 4\log_3^2 2 + \log_3^2 12 + 4\log_3 2}{\log_3 12 + 2\log_3 2}$$

равно

1) 1; 2) 2; 3) $\dfrac{1}{3}$; 4) 3; 5) $\dfrac{2}{3}$.

5. Если $\log_a 12 = n$, $\log_a 6 = m$, то значение выражения $\log_2 72$ равно

1) $\dfrac{n-m}{n+m}$; 2) $\dfrac{n+m}{2}$; 3) $\dfrac{n+m}{n-m}$; 4) $\dfrac{2}{n}+\dfrac{2}{m}$; 5) $\dfrac{n+m}{n}$.

6. Если $\log_{0,4} 27 = a$, то число $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{32,4}$ равно

1) $a^{-3}+4$; 2) $\sqrt[3]{a}-4$; 3) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{3}$; 4) $a^{-1}+12$; 5) a^2-1.

7. Значение выражения $\log_3 \sqrt[5]{5} - \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[5]{5,4}$ равно

1) 3; 2) $\dfrac{3}{5}$; 3) $\dfrac{1}{5}$; 4) 0; 5) 2.

8. Найти значение выражения $\log_{\frac{1}{4}}\left(\log_{\sqrt[4]{2}} 2^{\frac{1}{16}}\right)$.

9. Найти значение выражения $10\cdot\log_3 \dfrac{1}{5}\cdot\log_5 3 + 4^{\log_{20} 18}\cdot 5^{\log_{20} 18}$.

10. Найти значение выражения $\log_4\left(\log_{\sqrt[16]{4}} 4^{64}\right)$.

9.6. Ответы

Аудиторные задачи:

1. 7; **2.** 9; **3.** 1; **4.** 1; **5.** $-\dfrac{1}{3}$; **6.** 25; **7.** -0,75; **8.** $\sqrt[3]{25}$; **9.** 9; **10.** 16; **11.** 3; **12.** 1; **13.** $2\sqrt{5}$; **14.** -2; **15.** $\sqrt{7}$;**16.** 1; **17.** 64^3; **18.** $\dfrac{3}{4}$; **19.** 6; **20.** 1; **21.** -2; **22.** 1; **23.** $\dfrac{3}{2}$; **24.** $\dfrac{3+a+ab}{1+a+ab}$; **25.** $\dfrac{1}{a}-\dfrac{2}{3}$; **26.** $\dfrac{3a-c}{c-a}$; **27.** 4; **28.** -1; **29.** 1; **30.** 2; **31.** $\dfrac{8-24a}{12+ab}$.

Домашнее задание:

1. 1; **2.** $\frac{1}{8}$; **3.** 9; **4.** 25; **5.** 7; **6.** 16; **7.** $-\frac{2}{3}$; **8.** $\frac{1}{2}$; **9.** 9; **10.** 24; **11.** 1; **12.** 4; **13.** $\sqrt{6}$; **14.** 3; **15.** 2; **16.** 1; **17.** $\frac{1}{8}$; **18.** $1+\frac{1}{a}$; **19.** $\frac{8-24a}{12+ab}$.

10. Логарифмические и показательные уравнения

Показательные уравнения, логарифмические уравнения. Простейшее уравнение. Приемы сведения уравнения к простейшему. Смешанные уравнения и уравнения с параметром.

10.1. Справочный материал

Логарифмические уравнения

Логарифмическим называется уравнение, содержащее неизвестную величину под знаком логарифма.

Простейшее логарифмическое уравнение

$$\log_a x = b, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

с областью допустимых значений $x > 0$ имеет решение $x = a^b$.

Решение других логарифмических уравнений стараются свести к решению простейших логарифмических уравнений.

Нужно помнить, что *не всегда допустима замена функции* $y = a^{\log_a f(x)}$ *на* $y = f(x)$. Область существования функции $y = a^{\log_a f(x)}$ включает в себя лишь те x из области существования $y = f(x)$, где выполнено неравенство $f(x) > 0$. Поэтому замена в уравнении функции $y = a^{\log_a f(x)}$ на функцию $y = f(x)$ может привести к появлению *посторонних корней*. Если же в точках множества M функция $y = f(x)$ принимает только положительные значения, то равенство

$$a^{\log_a f(x)} = f(x)$$

является тождеством на M и эта замена есть равносильное преобразование на M.

При решении уравнений, содержащих логарифмические функции, применяются различные преобразования, сводящие данное уравнение к виду, удобному для потенцирования, т. е. к виду

$$\log_a f(x) = \log_a g(x).$$

Так, применяется замена функций $y = (\log_a f(x) + \log_a g(x))$ на функцию $y = \log_a(f(x) \cdot g(x))$, функции $y = \log_a f(x) - \log_a g(x)$ на функцию $y = \log_a \frac{f(x)}{g(x)}$, функции $y = N \log_a f(x)$ на функцию $y = \log_a (f(x))^N$. Выполняя такие преобразования, следует помнить, что они сохраняют равносильность уравнений на некотором множестве M только в том случае, когда все входящие в уравнения функции определены на M.

Показательным называют уравнение, в котором неизвестная величина входит только в показатели степеней при постоянных основаниях.

Простейшим показательным уравнением является уравнение вида

$$a^x = b.$$

Его решением при $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$ является

$$x = \log_a b.$$

Хотя при отдельных значениях a и b могут быть и другие решения. Например, если $a=1$, $b=1$, то любое число x является его решением.

Для решения произвольного показательного уравнения его стараются свести к решению простейших уравнений.

10.2. Примеры

Пример 1. Решить уравнение

$$2(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x - 5 = 0.$$

Решение. Поскольку квадратное уравнение

$$2y^2 - 3y - 5 = 0$$

имеет два корня $y_1 = \dfrac{5}{2}$ и $y_2 = -1$, то исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\log_2 x = \frac{5}{2} \text{ и } \log_2 x = -1.$$

Уравнение $\log_2 x = \dfrac{5}{2}$ имеет решение $x_1 = 2^{5/2}$, а решение уравнения $\log_2 x = -1$ есть $x_2 = 1/2$.

Следовательно, исходное уравнение имеет два корня $x_1 = 2^{5/2}$ и $x_2 = 1/2$.

Ответ: $x_1 = 2^{5/2}$, $x_2 = 1/2$.

Пример 2. Решить уравнение $2^{\log_2(x-4)} = 2x - 7$.

Решение. ОДЗ уравнения состоит из чисел x, удовлетворяющих неравенству $x-4>0$, т. е. $x>4$. На ОДЗ выполняется тождественное равенство $2^{\log_2(x-4)} \equiv x-4$, поэтому исходное уравнение равносильно на ОДЗ уравнению

$$x - 4 = 2x - 7.$$

Единственный корень этого уравнения $x=3$ не лежит в ОДЗ исходного уравнения. Значит оно не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Пример 3. Решить уравнение

$$\log_2(x-1)+\log_2 x=1.$$

Решение. ОДЗ состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $x-1>0$ и $x>0$, т. е. ОДЗ есть промежуток $1<x<+\infty$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению $\log_2((x-1)x)=1$ или уравнению $x^2-x=2$. Последнее уравнение имеет два корня: $x_1=2$ и $x_2=-1$. Из них ОДЗ принадлежит только x_1, значит, $x_1=2$ является единственным корнем исходного уравнения.

Ответ: $x_1=2$.

Пример 4. Решить уравнение

$$6^{2x+4}=3^{3x}\cdot 2^{x+8}.$$

Решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$3^{2x+4}\cdot 2^{2x+4}=3^{3x}\cdot 2^{x+8}.$$

Используя свойство членов пропорции, имеем

$$\frac{3^{2x+4}}{3^{3x}}=\frac{2^{x+8}}{2^{2x+4}}$$

или после упрощения

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{4-x}=1$$

и логарифмирования, получаем $4-x=0$, откуда следует, что $x=4$.

Ответ: 4.

Пример 5. Решить уравнение

$$6\cdot 4^x-13\cdot 6^x+6\cdot 9^x=0.$$

Решение. Разделим обе части уравнения на 9^x. Имеем

$$6\left(\frac{4}{9}\right)^x-13\left(\frac{2}{3}\right)^x+6=0.$$

Обозначая $\left(\frac{2}{3}\right)^x=y$ и производя замену переменных, получаем уравнение

$$6y^2-13y+6=0,$$

его корнями будут $y_1=3/2$, $y_2=2/3$. Возвращаясь к переменному x, получим уравнения

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{3}{2},\quad \left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{2}{3}.$$

Ответ: $x_1=1$, $x_2=-1$.

Пример 6. Решить уравнение

$$|x-2|^{10x^2-1}=|x-2|^{3x}.$$

Решение. Исходное уравнение эквивалентно уравнению

$$|x-2|=1,$$

системе

$$\begin{cases} |x-2|=0, \\ 10x^2-1>0, \\ 3x>0 \end{cases}$$

и системе

$$\begin{cases} 10x^2-1=3x, \\ |x-2|\neq 0. \end{cases}$$

Уравнение имеет два корня $x_1=3$, $x_2=1$. Первая система имеет решение $x_3=2$. Вторая система имеет два решения $x_4=1/2$, $x_5=-1/5$.

Ответ: $x_1=3$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=1/2$, $x_5=-1/5$.

10.3. Аудиторные задачи

Решить уравнения:

1. $\log_2(2x+1)-\log_2 x=\log_4 64$.

2. $\log_2^2 x-\log_2 x-2=0$.

3. $4\log_2 x^2=\log_2^2(-x)+16$.

4. $\log_3 44=\log_3 5\log_5 11-2\log_3(x-2)$.

5. $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}[3(2x+1)]+\log_{\sqrt{3}} 3=\log_3(2x+1)^2$.

6. $\log_{16} x+\log_8 x+\log_2 x=\dfrac{19}{12}$.

7. $\dfrac{1}{2}\log_3 x^2+3\log_3\sqrt[3]{x-2}=\dfrac{1}{3}\log_3 8-\log_3\dfrac{1}{x+6}$.

8. $\log_2(x+1)-\log_{\frac{1}{2}}(x-3)=\log_2 12$.

9. $\log_2[(x+1)(2x-3)]+\log_2\dfrac{2(x+1)}{2x-3}=3$.

10. $\log_{1/4}\log_{x-2} 16=-1$.

Найти наибольшие корни уравнений:

11. $\log_3^2 x-\log_3 x-3=2^{\log_2 3}$.

12. $\log_3 x+\log_x\dfrac{1}{9}=1$.

13. $\lg^2 x^2-\lg x^5+1=0$.

14. $\log_2^2\dfrac{x+2}{4}=3^{\log_{\sqrt{3}} 2}$.

15. Найти произведение корней уравнения $\log_{1/3}^2\dfrac{x}{9}+\log_{1/3}^2\dfrac{x}{3}=1$.

Решить уравнения:

16. $3^{\log_2 x^2} 5^{\log_2 x} = 2025$.
17. $\log_6 \sqrt{2^{x(x-1)}} + 3\log_6 3 = \log_x x^3$.
18. $\log_x(8x^2) = \sqrt{\log_x 8x^4}$.

19. $x^{4-\lg x} = 1$.

20. $4^{\log_5 x} + x^{\log_5 4} = 32$.
21. Найти значение выражения $x_0(x_0-10)$, если x_0 — корень уравнения $\lg \sqrt[3]{271+3^{\sqrt{3x}}} = 1$.
22. Найти значение выражения $k \cdot p$, если k — количество корней, а p — произведение корней уравнения $\log_{0,5z} \dfrac{1}{2x} + \log_x^{-2} 0,5 = 1$.

Решить показательные уравнения:
23. $\sqrt[4]{125^{3-2x}} = \dfrac{5}{\sqrt[4]{5}}$.
24. $3^{2-x} - 6 \cdot 3^{2x} = 3^{2x+1}$.
25. $2 \cdot 6^x + 3 \cdot 6^{x+3} = 325 \cdot 3^{-1}$.
26. $49^{x+1} + 55 \cdot 7^{x+1} - 56 = 0$.
27. $3^{2x+5} - 2^{2x+7} + 3^{2x+4} - 2^{2x+4} = 0$.
28. $4 \cdot 3^{2x} - 2^{2x-1} - 3^{2x+1} - 2^{2x} = 0$.
29. $6^{x-2} - \left(\dfrac{1}{6}\right)^{3-x} + 36^{\frac{x-2}{2}} = 66$.
30. $(x^2-2x+2)^{x^2-x} = (x^2-2x+2)^{4x-6}$.
31. $3 \cdot 2^{2x} + 6^x - 2 \cdot 3^{2x} = 0$.
32. $5^x - 1 = \sqrt{6+2 \cdot 5^x}$.
33. $|x-4|^{\sqrt{-x^2-5x}} = |x-4|^2$.
34. Найти произведение корней уравнения $x^{\log_2 x} = \dfrac{x^3}{4}$.
35. Найти сумму корней уравнения $\sqrt{x-1,5}\left(2^x + 8 \cdot 2^{-x} - 6\right) = 0$.
36. Найти сумму корней уравнения $2^{x^2} + 2^{x^2+3} - 2^{x^2+1} = 7 \cdot 2^{5x+6}$.
37. Пусть x_1 — наименьший корень уравнения

$$x^{\lg 2,4} = 2,4^{\lg x},$$

кратный 3. Найти значение выражения

$$24^{\lg(24+x_1) \cdot \lg^{-1} 24}.$$

Решить уравнения:
38. $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 2^x$.
39. $2^{3x^2-2x^3} = \dfrac{x^2+1}{x}$.
40. $\log_7(x+2) = 6 - x$.

41. Найти все значения параметра a, для которых уравнение $\dfrac{x^2-5x+6}{\ln(a+x)} = 0$ имеет ровно один корень.
42. Найти все значения параметра a, для которых уравнение

$$4^x - a \cdot 2^x - a + 3 = 0$$

имеет хотя бы одно решение.

43. Найти все значения параметра a, для которых уравнение $25^x+3|a|\cdot 5^x+36=a^2$ не имеет корней.

44. Для каждого значения параметра a решить уравнение

$$\sqrt{a(2^x-2)+1}=1-2^x.$$

45. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\log_3(9^x+9a^3)=x$$

имеет два решения.

10.4. Домашнее задание

Решить логарифмические уравнения:

1. $\log_5(x+1)+\log_5(x-1)=3\log_5 2$.

2. $\log_{\frac{3}{5}} x+4\log_{\frac{5}{3}} x=3$.

3. $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)=\log_{\frac{1}{2}}(x+5)-\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$.

4. $\log_{0,1}[x(x-7)]-\log_{0,1}\dfrac{9(x-7)}{x}=0$.

5. $\log_4(2\log_3(1+\log_2(1+3\log_2 x)))=\dfrac{1}{2}$.

6. $\sqrt{x^{\log_2 x}}=\log_{(x-1)}(x-1)^2$.

7. Найти значение выражения $\dfrac{k+2}{x_0}$, если k — число корней уравнения $\log_{2x+3}(5x^2+11x+3)=2$, а x_0 — его положительный корень.

8. Найти сумму корней уравнения $\left[\log_{0,4}(x+7)+\log_{0,4}(1-x)\right]\cdot(x^2-8x-20)=0$.

Решить показательные уравнения:

9. $9^x-3^x-6=0$.

10. $\left(\dfrac{14}{23}\right)^{x+\frac{2}{\sqrt{x}}}=\left(\dfrac{23}{14}\right)^{\frac{5}{\sqrt{x}}-x-1}$.

11. $4\cdot 7^{2x+4}-3^{2x+6}=2\cdot 7^{2x+3}+3^{2x+3}=0$.

12. $5\cdot 5^{-2x}+4\left(\dfrac{1}{5}\right)^x=1$.

13. $7^{2x+1}+4\cdot 21^x-3^{2x+1}=0$.

14. $11-3^x=\sqrt{3^x-5}$.

15. $|1-3x|^{\sqrt{5x^2+7x-2}}=|1-3x|^2$.

16. Найти значение выражения $\dfrac{x_0+5}{x_0}$, если x_0 — корень уравнения $2\cdot 16^x-2^{4x}=15+4^{2x-2}$.

17. Найти сумму корней уравнения $\sqrt{64^{x+3}}=\left(\sqrt[7]{8^{x+3}}\right)^{7x-35}$.

18. Найти сумму корней уравнения $\left(\dfrac{1}{81}\right)^{\log_3(x^2-0,5x-9)}=\left(\dfrac{1}{16}\right)^{\log_2(7-0,5x)}$.

Решить уравнения:

19. $3^{x-1}+5^{x-1}=34$.

20. $3^x = 10 - \log_2 x$.
21. $\log_{x+1}(x^2 + x - 6)^2 = 4$.
22. $(\sqrt{7+4\sqrt{3}})^{\cos x} + (\sqrt{7-4\sqrt{3}})^{\cos x} = \dfrac{5}{2}$.
23. Найти все значения параметра a, для которых уравнение $(x-2a)\log_2(x-1) = 0$ имеет ровно один корень.
24. Найти все значения параметра a, для которых уравнение $4^x + 3|a|\cdot 2^x + 49 = a^2$ не имеет корней.
25. Найти множество всех пар (a, b), для каждой из которых при всех x справедливо равенство

$$a \cdot e^x + b = e^{ax+b}.$$

10.5. Проверочный тест

1. Выражение $\dfrac{x}{x+1} + 1$, где x — корень уравнения

$$\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7,$$

равно
 1) $\dfrac{31}{16}$; 2) $\dfrac{33}{17}$; 3) $\dfrac{35}{18}$; 4) $\dfrac{37}{19}$; 5) $\dfrac{39}{20}$.

2. Произведение корней уравнения

$$\log_{25} x^2 + 2\log_{49} 7 = \log_x 25$$

равно
 1) 5; 2) $\dfrac{1}{5}$; 3) $\dfrac{1}{125}$; 4) 125; 5) 1.

3. Корень уравнения

$$4 \cdot 0,5^{\frac{x+1}{x}} - 0,5^{\frac{2x+1}{x}} = 14$$

принадлежит промежутку
 1) $(0, 1)$; 2) $(-2, 0)$; 3) $(-3, -1)$; 4) $(1, 3)$; 5) $(4, 5)$.

4. При всех $a \leqslant 1$ решениями уравнения

$$144^{|x|} - 2 \cdot 12^{|x|} + a = 0$$

являются числа
 1) $\varnothing$; 2) $\pm\log_{12}(1+\sqrt{1-a})$; 3) $\log_{12}(1+\sqrt{1-a})$; 4) $\pm\log_{12}(1+\sqrt{1+a})$; 5) $-\log_{12}(1+\sqrt{1+a})$.

5. Корень уравнения $8 \cdot 2^{2x} + 7 \cdot 2^x - 1 = 0$ равен
 1) -5; 2) -3; 3) -1; 4) 3; 5) 1.

6. Корень уравнения $\log_2(3x-4) + \sqrt{\log_2^2(2x-1)} = 0$ равен
 1) 2; 2) 2,5; 3) 1; 4) 3; 5) 1,5.

7. Произведение всех корней уравнения $\sqrt{5-2x}\log_7(10-x^2) = 0$ равно

1) $-22,5$; 2) $7,5$; 3) $22,5$; 4) $-7,5$; 5) $2,5$.

8. Решите уравнение $\log_{1-x}(2x^2-7x+3)=2+\dfrac{1}{\log_3(1-x)}$.

9. Найдите наименьший корень уравнения $\left(\dfrac{1}{27}-3^{6-x^2}\right)\log_2(4+5x)=0$.

10. Решите уравнение $5^{\log_7(25-4x^2)}=5^{\log_7(2x+5)+\log_7(2x^2+7x+15)}$.

10.6. Ответы

Аудиторные задачи:

1. $\frac{1}{6}$; **2.** 4, $\frac{1}{2}$; **3.** -16; **4.** $\frac{5}{2}$; **5.** 0; **6.** 2; **7.** 6; **8.** 5; **9.** -3; **10.** 4; **11.** 27; **12.** 9; **13.** 10; **14.** 14; **15.** 27; **16.** 4; **17.** 3; **18.** Нет корней; **19.** 1, 10000; **20.** 25; **21.** 24; **22.** 0,5; **23.** 1; **24.** 0; **25.** -1; **26.** -1; **27.** -1; **28.** $\frac{1}{2}$; **29.** 4; **30.** 1, 2, 3; **31.** 1; **32.** 1; **33.** -4, -1; **34.** 8; **35.** 3,5; **36.** 5; **37.** 27; **38.** 2. *Указание*: разделить обе части уравнения на 2^x и воспользоваться свойством монотонности показательной функции; **39.** 1. *Указание*: сравнить наибольшее значение функции, стоящей в левой части уравнения, с наименьшим в правой; **40.** 5. *Указание:* функция, стоящая в правой части уравнения убывает, а в левой — возрастает; **41.** $-3<a<-2$ или $a=-1$; **42.** $a\in[2,+\infty)$; **43.** $|a|\leqslant 6$; **44.** При $0<a\leqslant 1$ $x=\log_2 a$, при остальных a уравнение не имеет решений; **45.** $0<a<\dfrac{1}{\sqrt[3]{36}}$.

Домашнее задание:

1. 3; **2.** $\frac{5}{3}$; **3.** 1; **4.** -3; **5.** 2; **6.** $2^{\sqrt{2}}$; **7.** 1; **8.** -8; **9.** 1; **10.** 49; **11.** $-\frac{3}{2}$; **12.** 1; **13.** -1; **14.** 2; **15.** $\frac{1}{3}$, -2, $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{3}$; **16.** 6; **17.** 4; **18.** 0; **19.** 3; **20.** 2; **21.** 1; **22.** $\pm\arccos(\log_{2+\sqrt{3}}2)+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; **23.** $a\leqslant 0,5$ или $a=1$; **24.** $|a|\leqslant 7$; **25.** $(1,\ 0)$.

11. Логарифмические и показательные неравенства и системы уравнений

Показательные неравенства. Логарифмические неравенства. Смешанные неравенства. Логарифмические и показательные системы уравнений. Неравенства с параметром. Системы уравнений с параметром.

11.1. Справочный материал

Логарифмические и показательные системы уравнений

Системы, содержащие показательные и логарифмические уравнения, обычно решаются сведением показательного или логарифмического уравнения к алгебраическому уравнению (например, заменой переменных) с последующим решением полученной алгебраической системы.

Равносильные преобразования неравенств

В дополнении к известным преобразованиям приведем другие равносильные преобразования неравенств.

1. Неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ и $f(x) > g(x)$ равносильны для любого фиксированного числа a из промежутка $(1, +\infty)$.

2. Неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ и $f(x) < g(x)$ равносильны для любого фиксированного числа a из промежутка $(0, 1)$.

3. Пусть a — фиксированное число из промежутка $(1, +\infty)$ и на некотором множестве M функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ положительны. Тогда на этом множестве равносильны неравенства

$$f(x) > g(x) \quad \text{и} \quad \log_a f(x) > \log_a g(x).$$

4. Пусть a — фиксированное число из промежутка $(0, 1)$ и на некотором множестве M функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ положительны. Тогда на этом множестве равносильны неравенства

$$f(x) > g(x) \quad \text{и} \quad \log_a f(x) < \log_a g(x).$$

Логарифмические неравенства

Рассмотрим *простейшие* логарифмические неравенства.

Пусть α — некоторое положительное число, отличное от единицы. Замена неравенства

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \tag{1}$$

в случае $a > 1$ неравенством $f(x) < g(x)$, а в случае $0 < a < 1$ неравенством $f(x) > g(x)$ называется *потенцированием* неравенства (1).

В общем случае переход от неравенства (1) к неравенству $f(x) < g(x)$ либо к неравенству $f(x) > g(x)$ неравносилен. Например, замена неравенства $\log_2 x < \log_2 x^2$ неравенством $x < x^2$ есть неравносильный переход, так как числа, представляющие собой решения неравенства $x < x^2$, не являются решениями исходного неравенства.

Согласно утверждениям 3 и 4 о равносильности, неравенства вида (1) решают следующим образом:

1. Находят ОДЗ неравенства.

2. Решают неравенство на ОДЗ, учитывая, что потенцирование есть равносильное преобразование на этом множестве.

Иногда неравенство (1) заменяют при $a > 1$ равносильной системой неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > f(x) \end{cases}$$

или при $a < 1$ равносильной системой неравенств

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ g(x) < f(x). \end{cases}$$

Для того, чтобы привести логарифмическое неравенство к виду (1), надо сделать нужные преобразования, тождественные на ОДЗ исходного неравенства или на каком-либо ином множестве.

Пусть a — фиксированное, отличное от единицы положительное число. Замена неравенства

$$f(x)<g(x) \tag{2}$$

на неравенство

$$\log_a f(x)<\log_a g(x) \tag{3}$$

при $a>1$, либо неравенством

$$\log_a f(x)>\log_a g(x) \tag{4}$$

при $0<a<1$ называется *логарифмированием* неравенства (2). В общем случае такой переход неравносилен. Однако, если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ одновременно положительны на ОДЗ неравенства (2), то при $a>1$ неравенства (2) и (3) равносильны, а при $0<a<1$ неравенства (2) и (4) также равносильны.

Наиболее часто логарифмирование неравенств применяется в случае, когда

$$f(x)=a^{f_1(x)}, g(x)=a^{g_1(x)},$$

где число a таково, что $a>0$ и $a\neq 1$. При этом применяются утверждения 1 и 2 о равносильности.

11.2. Примеры

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 8(\sqrt{2})^{x-y}=0,5^{y-3}, \\ \log_3(x-2y)+\log_3(3x+2y)=3. \end{cases}$$

Решение. Множество допустимых значений неизвестных x и y определяется системой неравенств

$$x-2y>0, \quad 3x+2y>0.$$

Из первого уравнения системы, записанного в виде

$$(\sqrt{2})^{x-y+6}=(\sqrt{2})^{6-2y},$$

получаем уравнение

$$x-y+6=6-2y \quad \text{или} \quad x+y=0.$$

Из второго уравнения системы, записанного в виде

$$\log_3[(x-2y)(3x+2y)]=3,$$

получаем уравнение

$$(x-2y)(3x+2y)=27.$$

Подставляя в него $y=-x$, найдем, что

$$3x^2=27,$$

откуда $x_1=3$, $x_2=-3$. Соответственно, $y_1=-3$, $y_2=3$. Из этих пар чисел только пара $(3,-3)$ удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: $(3,-3)$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\log_3(x^2-1)\leqslant 1.$$

Решение. ОДЗ неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условию $x^2-1>0$, значит, есть объединение двух промежутков $-\infty<x<-1$ и $1<x<+\infty$. На этой области исходное неравенство равносильно неравенству

$$x^2-1\leqslant 3,$$

которое удовлетворяется только для x из промежутка $-2\leqslant x\leqslant 2$. Из этих x в ОДЗ попадают лишь принадлежащие одному из двух промежутков $-2\leqslant x<-1$ и $1<x\leqslant 2$. Следовательно, все x из указанных промежутков удовлетворяют исходному неравенству.

Ответ: $-2\leqslant x<-1$, $1<x\leqslant 2$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\log_{\sin\pi/3}(x^2-3x+2)\geqslant 2.$$

Решение. ОДЗ неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условию $x^2-3x+2>0$, значит, есть объединение двух промежутков $-\infty<x<1$ и $2<x<+\infty$. Поскольку $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}<1$ и $2=2\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\dfrac{3}{4}$, то на этой области исходное неравенство равносильно неравенству $x^2-3x+2\leqslant\dfrac{3}{4}$ или неравенству $4x^2-12x+5\leqslant 0$. Решения последнего неравенства составляют промежуток $\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{2}$. Поскольку $\dfrac{1}{2}<1$ и $\dfrac{5}{2}>2$, то множество решений исходного неравенства состоит из двух промежутков: $\dfrac{1}{2}\leqslant x<1$ и $2<x\leqslant\dfrac{5}{2}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}\leqslant x<1$ и $2<x\leqslant\dfrac{5}{2}$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\log_{1/2}(4-x)\geqslant\log_{1/2}2-\log_{1/2}(x-1).$$

Решение. ОДЗ неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $4-x>0$ и $x-1>0$, т. е. ОДЗ является интервалом $1<x<4$. На этом интервале исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_{1/2}(4-x)(x-1)\geqslant\log_{1/2}2$$

или неравенству

$$(4-x)(x-1)\leqslant 2.$$

Решения последнего неравенства составляют два промежутка $-\infty<x\leqslant 2$ и $3\leqslant x<+\infty$. Из этих решений в интервале $1<x<4$ лежат лишь x из двух промежутков $1<x\leqslant 2$ и $3\leqslant x<4$.

Ответ: $1<x\leqslant 2$ и $3\leqslant x<4$.

Пример 5. Решить неравенство

$$2^{x-1}>\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Решение. Данное неравенство можно переписать в виде

$$2^{x-1}>2^{-\frac{4}{x}}.$$

Логарифмируя по основанию 2, получим равносильное неравенство

$$x-1>-\frac{4}{x}.$$

Перенесем все члены этого неравенства влево и приведем получившееся в левой части неравенства выражение к общему знаменателю. В результате получим неравенство

$$\frac{x^2-x+4}{x}>0,$$

равносильное исходному. Дискриминант квадратного трехчлена x^2-x+4 отрицателен (он равен -15). Значит, числитель последнего неравенства положителен при любом действительном x, и поэтому неравенство равносильно неравенству

$$\frac{1}{x}>0;$$

множество решений которого есть промежуток $x>0$.

Ответ: $x>0$.

Пример 6. Решить неравенство

$$3^{4x^2-3x+\frac{1}{2}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-40x^2}.$$

Решение. Так как $\left(\frac{1}{3}\right)^{-40x^2}=3^{40x^2}$ и $3>1$, то данное неравенство равносильно неравенству $4x^2-3x+\frac{1}{2}<40x^2$ или неравенству

$$36x^2+3x-\frac{1}{2}>0. \qquad (5)$$

Корнями квадратного трехчлена $36x^2+3x-\frac{1}{2}$ являются $x_1=-\frac{1}{6}$ и $x_2=\frac{1}{12}$. Поэтому множество решений неравенства (5), а следовательно , и исходного неравенства есть два промежутка: $-\infty<x<-\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{12}<x<+\infty$.

Ответ: $-\infty<x<-\frac{1}{6}$; $\frac{1}{12}<x<+\infty$.

11.3. Аудиторные задачи

Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} \log_2 x+\log_4 y=4, \\ \log_4 x+\log_2 y=5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \log_2(x-y)=5-\log_2(x+y), \\ \dfrac{\lg x-\lg 4}{\lg y-\lg 3}=-1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2^x+2^y=12, \\ x-y=1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2\cdot 4^x+3\cdot 5^y=11, \\ 5\cdot 4^x+4\cdot 5^y=24. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2^x\cdot 3^y=12, \\ 2^y\cdot 3^x=18. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3^x\cdot 2^y=144, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=2. \end{cases}$

7. Найти большее значение переменной в решении системы

$$\begin{cases} 16^{y+x}=4^{x-y}, \\ 81^{\log_9\sqrt{4-x}}=1. \end{cases}$$

Найти наибольшие целые x, удовлетворяющие неравенствам:

8. $\lg 5^{2x+3}-\lg 25>\lg 5^{3x-2}+\lg 5$.

9. $(x+1)\log_{0,7}3-\log_{0,7}27>0$.

10. $\log_6(x^2-x)<1$.

11. $5^{\log_5(2x-1)}<7$.

12. $\log_2\log_{\sqrt{5}}(x-1)<1$.

13. $\sqrt{\log_{1/2}(x^2-4x+4)}<1$.

Решить неравенства:

14. $\log_2(2x+4)+\log_2(x+1)\leqslant\log_2(4-x)$.

15. $\log_{\frac{1}{2}}(2x+18)-\log_{\frac{1}{2}}(x+5)<\log_{\frac{1}{2}}(6-x)$.

Найти наименьшие целые x, удовлетворяющие неравенствам:

16. $\log_{\frac{1}{3}}(x+2)-\log_9(x+2)>-\frac{3}{2}$.

17. $\log_{x+1}(5-x)>1$.

18. $\log_{2x+1}(3-2x)<1$.

19. $\log_{x-2}(2x-9)<1$.

Найти число целых решений неравенства:

20. $\sqrt{x-7}\left(\lg(x+1)+\dfrac{1}{\log_{x+2}10}\right)\leqslant 0.$

21. $2^{\log_2^2 x+2}+x^{\log_2 x}<5x^{2\log_x 4}.$

При каких целых x выполняются неравенства:

22. $\log_{\frac{3}{2}}(3x-2)-\log_{\frac{3}{2}}56<\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{1}{2}-\log_{\frac{3}{2}}7.$

23. $\log_{\frac{7}{6}}(2x-3)-2\log_{\frac{7}{6}}6<\log_{\frac{7}{6}}\dfrac{1}{4}-\log_{\frac{7}{6}}3.$

Найти наименьшие целые x, удовлетворяющие неравенствам:

24. $5^{x+1}-3^{x+2}>2\cdot 5^x-2\cdot 3^{x-1}.$

25. $7^{x+2}-8^{x+2}<6\cdot 7^{x+1}-7\cdot 8^{x+1}.$

26. $2^{2x}-3\cdot 2^x+2\leqslant 0.$

27. $9^{x+1}-3^{x+3}<3^x-3.$

28. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2+4x}\geqslant\left(\dfrac{8}{27}\right)^{x+2}.$

29. $(0,2)^{\frac{6x-1}{3-x}}<\left(\dfrac{1}{5}\right)^2.$

30. $5^{\sqrt{x-2}}>5^{1-\sqrt{x-2}}+4.$

31. $(x-3)^{x^2-9}>1.$

32. $(x+1)^{x^2-4}\geqslant 1.$

Решить неравенства:

33. $3^{\sqrt{x+1}+1}-28+3^{2-\sqrt{x+1}}<0.$

34. $(x+1)^{x^2-36}<1.$

35. $\dfrac{6\cdot 4^x}{4^{2x}-1}\leqslant\dfrac{3\cdot 4^x}{4^x-1}-\dfrac{3}{4^x+1}.$

36. Найти число целых значений аргумента в области определения функции $y=\sqrt{\dfrac{\log_2^2(x-2)}{11x-x^2-28}}.$

37. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} yx^{\log_y x}=x^{2,5},\\ \log_3 y\log_y(y-2x)=1.\end{cases}$$

Решить неравенства:

38. $\log_{2x}(x^2-5x+6)<1.$

39. $(\log_{\sin x}2)^2<\log_{\sin x}(4\sin^3 x).$

40. $\log_{(5-x)^2}(x^2+4)\leqslant 0.$

41. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$\log_{a(a+1)}(|x|+4)>1$$

выполняется при любом x.

42. Найти все такие значения x, по абсолютной величине меньшие 3, которые при всех $a \geqslant 5$ удовлетворяют неравенству

$$\log_{2a-x^2}(x-2ax)>1.$$

43. Найти все решения неравенства для каждого значения параметра a

$$a^2-9^{x+1}-8\cdot 3^x\cdot a>0.$$

44. Для каждого значения параметра $a>0$ решить неравенство

$$x^{\sin x-a}>1$$

при условии, что $x\in(0,\pi/2)$.

11.4. Домашнее задание

Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} \log_3 x+\log_9 y=3, \\ \log_{\frac{1}{3}} x+\log_3 y=3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5\cdot 3^{x-1}-3\cdot 2^y=-1, \\ 3^{x+1}+5\cdot 2^{y-1}=14. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2^x-2^y=1, \\ 2^{3x}-2^{3y}=7. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \log_3(2x+y^2)=1, \\ 2^{x+y^2}-4=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \log_5(\log_3 x+\log_3 y)=0, \\ 4^{x-y}=16. \end{cases}$

6. Найти большее значение переменной в решении системы

$$\begin{cases} 9^{\log_3(x+2)}=25 \\ 4^{x-2y}=2^{x+2y}. \end{cases}$$

Найти число целых решений неравенства:

7. $\log_3(x^2+2x-3)\leqslant\log_{1/3}\dfrac{1}{x+17}$.

8. $(x^2+25)\log_{0,2}(x-3)+\dfrac{10x}{\log_{x-3}5}\geqslant 0$.

9. $\sqrt{5-x}\left(22^{2x+4}-2^{3x}\cdot 11^{4x-4}\right)\leqslant 0$.

Найти наибольшие целые x, удовлетворяющие неравенствам:

10. $\lg 3^{8-x}+\lg 5>\lg 27+\lg 15$.

11. $(2x-3)\log_{\frac{3}{4}} 5-3\log_{\frac{3}{4}} 5>0$.

12. $\log_{\sqrt{3}}(12-x^2)>2$.

13. $3^{\log_3(x+5)}<2$.

14. $\log_3 \log_{\frac{1}{2}} (2x+1) > 0.$

15. $\log_{\sqrt{5}}(2x-1) - \log_{\frac{1}{25}} (2x-1) < \dfrac{5}{2}.$

16. $\log_x(2x-3) < 1.$

17. $\log_{x-1}(4-x) < 1.$

Найти наименьшие целые x, удовлетворяющие неравенствам:

18. $3^{2x+2} - 3^{x+4} < 3^x - 9.$

19. $11^{\log_7 x} + x^{\log_7 11} \leqslant 2 \cdot x^{2\log_x 11}.$

20. $3^x + 10^{x-2} > 19 \cdot 3^{x-2} + 10^{x-3}.$

21. $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{2x-7}{x+1}} \geqslant \dfrac{5}{2}.$

22. $2^{\sqrt{x+1}} - 1 < 3 \cdot 2^{2-\sqrt{x+1}}.$

23. $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^{x^2 - \frac{1}{4}} > 1.$

24. Найти число целых значений аргумента в области определения функции $y = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{\ln^2(10-x^2)}}.$

25. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_y |\log_y x| = \log_x |\log_x y|, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 8. \end{cases}$$

Решить неравенства:

26. $\log_{3x^2+1}(2x^2 + x + 7) \geqslant 1.$

27. $\log_{|x|}(\sqrt{9-x^2} - x - 1) \geqslant 1.$

28. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$\log_{\frac{a}{a+1}} (x^2+2) > 1$$

выполняется при любом значении x.

29. Найти все значения параметра α, при которых неравенство

$$4^x - \alpha \cdot 2^x - \alpha + 3 \leqslant 0$$

имеет хотя бы одно решение.

11.5. Проверочный тест

1. Все решения неравенства

$$2\log_8(x-2) - \log_8(x-3) > \frac{2}{3}$$

составляют множество

1) $(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$; 2) $(-\infty,4)$; 3) $\{2\}\cup(4,+\infty)$; 4) $(3,+\infty)$; 5) $(3,4)\cup(4,+\infty)$.

2. Все решения неравенства

$$2^{x+2}-5^{x+1}-2^{x+3}>2^{x+4}-5^{x+2}$$

составляют множество

1) $(-\infty,0)$; 2) $(0,+\infty)$; 3) $(1,+\infty)$; 4) $(-\infty,1)$; 5) $(0,1)$.

3. Если (x,y) — решение системы

$$\begin{cases} 3^{2x}-2^{y}=725, \\ 3^{x}-2^{\frac{y}{2}}=25, \end{cases}$$

то $x+y$ равно

1) 5; 2) 6; 3) -5; 4) 0; 5) 4.

4. Наименьшее целое x, удовлетворяющее неравенству

$$(x-2)^{x^2-1}>1,$$

равно

1) 5; 2) 2; 3) 3; 4) 0; 5) 4.

5. Наименьшее целое x, удовлетворяющее неравенству

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{x^2+1}>\left(\frac{1}{9}\right)^{-x^2+8x},$$

равно

1) 0; 2) 1; 3) 3; 4) -1; 5) $\varnothing$.

6. Если (x,y) — решение системы

$$\begin{cases} \log_3(2x)-\log_3 y=2, \\ 2x+y=8, \end{cases}$$

то $x+y$ равно

1) 4; 2) $3{,}6$; 3) $4{,}4$; 4) $0{,}8$; 5) $3{,}2$.

7. Наибольшее целое решение неравенства

$$\log_3(x+5)+\log_3(4-x)\geqslant\log_3(3x-1)$$

равно

1) 4; 2) 2; 3) 3; 4) 1; 5) -2.

8. Найдите целое решение неравенства $\dfrac{\sqrt{7-x^2+6x}}{\lg^2(1-x)}\geqslant 0$.

9. Найдите наименьшее целое решение неравенства $5^{6x-1}-3^{1-6x}\geqslant 0$.

10. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_4\dfrac{x-13}{x-10}\right)\geqslant 0$.

11.6. Ответы

Аудиторные задачи:

1. $(4,16)$; **2.** $(6,2)$; **3.** $(3,2)$; **4.** $(1,0)$; **5.** $(2,1)$; **6.** $(2,1)$; **7.** 3; **8.** 1; **9.** 1; **10.** 2; **11.** 3; **12.** 5; **13.** 3; **14.** $x\in(0,1]$; **15.** $x\in(-5,-4)\cup(3,6)$; **16.** -1; **17.** 1; **18.** 1; **19.** 4; **20.** 1; **21.** 2; **22.** 1; **23.** 2; **24.** 3; **25.** 0; **26.** 0; **27.** -1; **28.** -3; **29.** 1; **30.** 4; **31.** 5; **32.** 3; **33.** $[-1,3)$; **34.** $(0,6)$; **35.** $(0,+\infty)$; **36.** 3; **37.** $(3,9)$. *Указание:* прологарифмировать первое уравнение по основанию x; **38.** $(0,1/2)\cup(1,2)\cup(3,6)$; **39.** $(1/2,3/4)$; **40.** $(4,5)\cup(5,6)$; **41.** $\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}<a<\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ и $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<a<\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$; **42.** $x\in(-3,-1)$; **43.** При $a=0$ решений нет, при $a>0$ $x<-2+\log_3 a$, при $a<0$ $x<\log_3(-a)$; **44.** При $a\geqslant 1$ $x\in(0,1)$, при $a\leqslant\sin 1$ $x\in(0,\arcsin a)\cup(1,\pi/2)$, при $\sin 1<a<1$, $x\in(\arcsin a,\pi/2)\cup(0,1)$.

Домашнее задание:

1. $(3,81)$; **2.** $(1,1)$; **3.** $(1,0)$; **4.** $(1,1)$; **5.** $(3,1)$; **6.** 3; **7.** 5; **8.** 0; **9.** 2; **10.** 3; **11.** 2; **12.** 2; **13.** -4; **14.** Нет целых решений; **15.** 2; **16.** 2; **17.** 3; **18.** -1; **19.** 2; **20.** 5; **21.** 0; **22.** -1; **23.** 0; **24.** 4; **25.** $(100,0,01)$, $(100,\ 100)$, $(0{,}01,\ 100)$, $(0{,}01;\ 0{,}01)$. *Указание:* в первом уравнении перейти к десятичным логарифмам; **26.** $[-2,0)\cup(0,3]$; **27.** $(-\sqrt{8},-1)\cup(1,\sqrt{41}/5)$; **28.** $a<-2$; **29.** $\alpha\geqslant 2$.

12. Функции и их графики

Понятие числовой функции, способы задания, область определения, область значений функции. График функции. Общие свойства функции: промежутки знакопостоянства, монотонность, ограниченность, четность, нечетность, периодичность. Понятие обратной функции. Графики прямой и обратной функции. Элементарные функции. Преобразования графиков функций: сдвиг вдоль осей координат, растяжение и сжатие вдоль осей координат, преобразования, связанные с наличием знака модуля у аргумента или функции.

12.1. Справочный материал

Чтобы задать некоторую (числовую) *функцию*, нужно задать два числовых множества: *область определения функции*, *область значений функции* и *закон (правило)*, по которому каждому числу из области определения ставится в соответствие некоторое число из области значений функции.

Функция обычно обозначается $y=f(x)$, указывая тем самым на правило, по которому для значения аргумента x находится значение функции $f(x)$. Тем самым не обращается внимания на область определения функции и на ее область значений.

Функции, изучаемые в школьном курсе математики, называют *элементарными функциями*. К ним относятся *основные элементарные функции*:

$y=x^\alpha$ — степенная функция ($\alpha\in\mathbb{R}$),

$y=a^x$ — показательная функция ($a>0,\ a\neq 1$),

$y=\log_a x$ — логарифмическая функция ($a>0,\ a\neq 1$),

$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ — тригонометрические функции,

$y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\mathrm{arctg}\, x$, $y=\mathrm{arcctg}\, x$ — обратные тригонометрические функции.

Функции, получаемые из перечисленных с помощью арифметических операций: сложения, вычитания, умножения и деления, и операции взятия сложной функции, называются *элементарными.*

Функцию $y=|x|$ также можно отнести к классу элементарных функций, так как $|x|=\sqrt{x^2}$.

Таким образом элементарные функции задаются некоторой формулой из основных элементарных функций. Тем самым у них существует естественная область определения (т. е. множество тех значений аргумента, для которых данная формула определена) и естественная область значений (т. е. множество всех значений, которые принимаются данной формулой при подстановке в нее всех значений аргумента из области определения). Обычно эти области имеются в виду, когда ставят задачу о нахождении области определения и области значений некоторой элементарной функции.

Графики функций и их преобразования

Рассмотрим на плоскости декартову систему координат XOY.

Графиком функции $y=f(x)$ называется множество точек $M(x,y)$, таких, что $y=f(x)$, а аргумент x принадлежит области определения функции.

Графики некоторых элементарных функций носят специальные названия. Так, график функции $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ называется *параболой,* а график функции $y=\sin x$ называется *синусоидой.*

Напомним некоторые простейшие преобразования графиков функций.

1. График функции $y=-f(x)$ симметричен графику функции $y=f(x)$ относительно оси абсцисс.

2. График функции $y=f(-x)$ симметричен графику функции $y=f(x)$ относительно оси ординат.

3. График функции $y=-f(-x)$ симметричен графику функции $y=f(x)$ относительно начала координат.

4. График функции $y=f(x+a)$ получается из графика функции $y=f(x)$ с помощью параллельного переноса (сдвига) последнего вдоль оси OX на $|a|$ единиц масштаба влево, если $a>0$, и на $|a|$ единиц вправо, если $a<0$.

5. График функции $y=f(x)+b$ получается из графика функции $y=f(x)$ с помощью параллельного переноса (сдвига) последнего вдоль оси OY на $|b|$ единиц масштаба вверх, если $b>0$, и на $|b|$ единиц вниз, если $b<0$.

6. График функции $y=f(kx)$ получается из графика функции $y=f(x)$ с помощью сжатия по оси абсцисс исходного графика пропорционально коэффициенту k при аргументе (если $k>1$, то график *сжимается* в k раз, а если $0<k<1$, то график *растягивается* в $\frac{1}{k}$ раз). Если $k<0$, то нужно сначала построить график функции $y=f(|k|x)$, а затем отразить его симметрично относительно оси OY.

7. График функции $y=mf(x)$ получается из графика функции $y=f(x)$ с помощью растяжения по оси ординат исходного графика пропорционально коэффициенту

m (если $m > 1$, то график *растягивается* в m раз, а если $0 < m < 1$, то график *сжимается* в $\dfrac{1}{m}$ раз). Если $m < 0$, то нужно сначала построить график функции $y = |m| f(x)$, а затем отразить его симметрично относительно оси OX.

График функции $y = mf(kx + a) + b$ строят, применяя в определенной последовательности описанные выше преобразования. Сначала строим график функции $y = f(x + a)$. Затем строим график функции $y = f(kx + a)$. Далее строим график функции $y = mf(kx + a)$. Наконец, строим график функции $y = mf(kx + a) + b$.

Приведем правила построения графиков функций, содержащих знак модуля.

8. Чтобы построить график функции $y = |f(x)|$ из графика функции $y = f(x)$, нужно ту часть графика функции $y = f(x)$, которая находится ниже оси OX, отразить симметрично относительно этой оси; а часть графика функции $y = f(x)$, которая находится выше оси OX, оставить без изменения.

9. Чтобы построить график функции $y = f(|x|)$ из графика функции $y = f(x)$, нужно часть графика функции $y = f(x)$, лежащую правее оси OY оставить без изменения, а вместо оставшейся части графика нарисовать кривую, получающуюся отражением первой части графика функции $y = f(x)$ относительно оси OY.

10. Чтобы построить график функции $y = |f(|x|)|$ из графика функции $y = f(x)$, нужно сначала построить график функции $y = f(|x|)$ согласно второму правилу, а затем из полученного графика построить график функции $y = |f(|x|)|$ согласно первому правилу.

Обратная функция

Пусть $D(f)$ и $E(f)$ соответственно область определения и множество значений функции $y = f(x)$.

Если для любого y из множества $E(f)$ существует *единственное* число $x = g(y)$ из $D(f)$, то функция $y = f(x)$ называется *обратимой.* Функция $x = g(y)$ называется *обратной* функцией (при этом первоначальная функция $y = f(x)$ называется *прямой* функцией).

Областью определения обратной функции является множество значений прямой функции, а множеством значений обратной функции является область определения прямой функции.

Если для обратной функции использовать стандартные обозначения аргумента и функции $y = g(x)$, тогда графики взаимно-обратных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ будут симметричны относительно прямой $y = x$ (биссектрисы первого координатного угла).

Для того, чтобы для функции $y = f(x)$ найти обратную функцию, нужно:

1. Решить уравнение $y = f(x)$ относительно переменной x. Если это удалось, то мы получаем соотношение $x = g(y)$, в котором меняем местами x и y;

2. Функция $y = g(x)$ и есть обратная к функции $y = f(x)$;

3. Если уравнение $y = f(x)$ имеет для данного y не одно, а несколько решений, тогда у заданной функции обратной функции не существует. В этом случае нужно пробовать найти обратную функцию не на всей области определения, а на ее части.

Так, например, для функции x^2 уравнение $y = x^2$ имеет два решения $x = \pm\sqrt{y}$ при $y \geqslant 0$. Если взять арифметическое значение корня $\sqrt{y}$, то функция $y = \sqrt{x}$ будет обратной к функции $y = x^2$ не на всей области определения, а только при $x \geqslant 0$.

12.2. Примеры

Пример 1. Найти область определения функции

$$y = \lg(1 - 2\cos x).$$

Решение. Известно, что логарифм определен для положительных значений аргумента, поэтому получаем

$$1 - 2\cos x > 0 \quad \text{или} \quad \cos x < \frac{1}{2}.$$

Решая данное неравенство на промежутке $[0, 2\pi]$, получаем интервал $(\pi/3, 5\pi/3)$.

Ответ: $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi k\right)$.

Пример 2. Найти область значений функции

$$y = \arccos\frac{x}{1+x^2}.$$

Решение. Сначала найдем область значений функции

$$t = \frac{x}{1+x^2}.$$

Поскольку $0 \leqslant (1-x)^2 = 1 + x^2 - 2x$, то $2x \leqslant 1 + x^2$. Причем в точке $x = 1$ это неравенство превращается в равенство. Тогда

$$\frac{x}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Аналогично получаем, что

$$\frac{x}{1+x^2} \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Таким образом область значений функции $t(x)$ есть отрезок $[-1/2; 1/2]$.

Функция $\arccos t$ строго убывающая на промежутке $[-1, 1]$. Поэтому на промежутке $[-1/2; 1/2]$ она изменяется между $\arccos 1/2$ и $\arccos -1/2$, т. е. на отрезке $[\pi/3; 2\pi/3]$.

Ответ: $[\pi/3; 2\pi/3]$.

Пример 3. Для функции $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ найти обратную функцию.

Решение. Рассмотрим уравнение

$$y = \frac{1-x}{1+x}$$

и решим его относительно x. Получим

$$y + yx = 1 - x \quad \text{или} \quad yx + x = 1 - y.$$

Отсюда
$$x=\frac{1-y}{1+y}.$$
Переобозначая переменные, получим, что обратная функция имеет вид
$$y=\frac{1-x}{1+x}$$
и, следовательно, совпадает с первоначальной функцией.

Ответ: $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

Пример 4. Построить график функции
$$y=|x^2+|x|-1|=||x|^2+|x|-1|.$$

Сначала строим график функции $y=x^2+x-1$ (параболу). Она обозначена на рис. 14 пунктиром. А затем производим действия согласно первому и второму правилам.

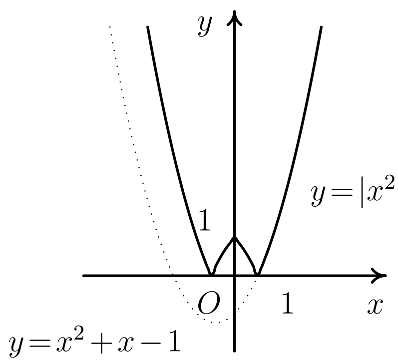

Рис. 14

Пример 5. При каких значениях параметра a уравнение
$$|x^2-6|x|+5|=a$$
имеет 8 различных корней?

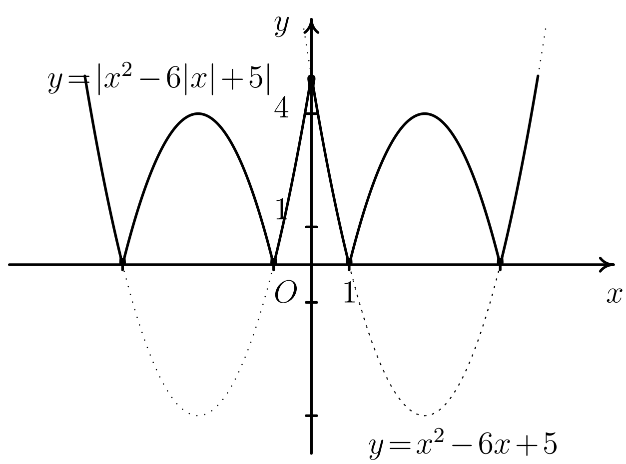

Рис. 15

Решение. Строим график функции $y=|x^2-6|x|+5|=||x|^2-6|x|+5|$ согласно правилам построения графиков с модулями из графика функции $y=x^2-6x+5$ (рис. 15). Вершина этой параболы имеет координаты $(3,-4)$.

Для того, чтобы прямая $y=a$ пересекала график функции $y=|x^2-6|x|+5|$ в восьми точках, необходимо, чтобы $a\in(0,4)$.

Ответ: $a\in(0,4)$.

12.3. Аудиторные задачи

Найти область определения функций:

1. $y=\sqrt{\dfrac{3-2x}{1-4x+4x^2}}$.

2. $y=\sqrt{\dfrac{x}{6-x}}$.

3. $y=\sqrt{\log_3\dfrac{2x-3}{x-1}}$.

4. $y=\sqrt{\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}}$.

5. $y=\arccos(0,5x-1)$.

6. $y=\sqrt{\arcsin x-\arccos x}$.

7. $y=\operatorname{tg}(2\arccos x)$.

Найти область значений функций:

8. $y=\dfrac{2x}{x^2+9}$.

9. $y=\sqrt{x^2+2x+2}$.

10. $y=\sin x-5\cos x$.

11. $y=1-2|\sin 2x|$.

12. $y=\sqrt{\lg\sin x}$.

13. $y=\operatorname{arctg}(\sin x)$.

14. $y=4^x-2^x+1$.

15. Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую соотношению

$$f(x-2)=\frac{1}{x+1},\quad x\neq-1.$$

16. Найти функцию $g(x)$, если $f(x+2)=-x+1$ и $f(g(x))=4x+5$.

17. Функция $y=f(x)$ определена на множестве всех действительных чисел и является периодической с периодом 5. Найдите значение выражения $2f(-6)-f(9)-f(-8)$, если $f(-1)=-2$ и $f(2)=3,5$.

18. Функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой и является четной периодической функцией с периодом 6. На отрезке $[0,3]$ функция задана формулой $f(x)=2+2x-x^2$. Определите количество нулей этой функции на отрезке $[-5,4]$.

19. Найти $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+f\left(\dfrac{x}{25}\right)$, если $f(x)=\dfrac{7x-1}{5x+1}$.

20. Для всех $x\neq-1$ функция $f(x)$ удовлетворяет соотношению

$$(2x-8)f(x+1)+(10-x)f\left(\frac{1}{x+1}\right)=4+2x.$$

Найти значение $f(x)$ в точке $x_0=3$.

Найти функции, обратные заданным:

21. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

22. $y=\dfrac{1}{x^3}$.

23. $y=3^{1-x}$.

24. $y=2^{x-1}-2^{-x}$.

25. Графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ симметричны относительно прямой $y=-x$. Найти $g(x)$, если $f(x)=0,5^{x-2}$.

26. Графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ симметричны относительно прямой $y=-x$. Найти $g(x)$, если $f(x)=2^{x-1}$.

27. Какие из графиков функций $y_1=x-1$, $y_2=\sqrt{(x-1)^2}$, $y_3=\left(\sqrt{x-1}\right)^2$ совпадают?

28. Найти множество значений параметра a, при которых уравнение

$$|x^2-4|x|+3|=a$$

имеет ровно 8 корней.

29. Сколько корней имеет уравнение

$$|x^2-2|x|-8|=a$$

при различных значениях параметра a.

30. Пусть

$$f(x)=\frac{x}{x+2}.$$

Найти $f(f(x))$.

12.4. Домашнее задание

Найти область определения функций:

1. $y=\sqrt{\dfrac{3x+2}{4x^2+4x+1}}$.

2. $y=\sqrt{x^2-|x|-2}$.

3. $y=\dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos 2x}$.

4. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x^2-9}$.

Найти область значений функций:

5. $y=\dfrac{3-x^2}{3+x^2}$.

6. $y=3\sin x+4\cos x$.

7. $y=\cos^2 x-\sin x$.

8. $y=\log_2(4-x^4)$.

9. Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую соотношению

$$f(1/x)=x^2+1, \quad x\neq 0.$$

10. Найти функцию $g(x)$, если $f(x-5)=4x-4$ и $f(g(x))=4x+8$.
11. Для всех $x\neq -3$ функция $f(x)$ удовлетворяет соотношению

$$(7x-2)f(x+3)+(3x-2)f\left(\frac{1}{x+3}\right)=-10x+4.$$

Найти значение $f(x)$ в точке $x_0=1$.
12. Найти $f(x-4)-f(x-12)$, если $f(x)=\dfrac{3x+4}{x+8}$.

Найти функции, обратные заданным:
13. $y=1-\sqrt[3]{x}$.
14. $y=\sqrt{x-1}$.
15. $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.
16. Графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ симметричны относительно прямой $y=-x$. Найти $g(x)$, если $f(x)=3^{-x-2}$.
17. Какие из графиков функций $y_1=x$, $y_2=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$, $y_3=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$ совпадают?
18. Найти множество значений параметра a, при которых уравнение

$$|x^2-6|x|+5|=a$$

имеет ровно 4 корня.

12.5. Проверочный тест

1. Область значений функции

$$y=10^{1-2\cos x}$$

есть множество

1) $[0;1000]$; 2) $[0,1;1000]$; 3) $(0;1000)$; 4) $[1000;+\infty)$; 5) $(0,1;+\infty)$.

2. Какое из этих чисел входит во множество значений функции $y=3^x+7$
1) 7; 2) 8; 3) 6; 4) 5; 5) 4 ?
3. Область определения функции

$$y=\frac{\sqrt{2x-1}}{4x^2-12x+9}$$

есть множество

1) $[-0,5;+\infty)$; 2) $(0,5;1,5]$; 3) $[0,5;1,5)\cup(1,5;+\infty)$;
4) $(-\infty;-0,5)\cup(1,5;+\infty)$; 5) $(1,5;+\infty)$.

4. Графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ симметричны относительно прямой $y=-x$. Если $f(x)=0,5^{x+2}$, то $g(x)$ равно

1) $-\log_2(-4x)$; 2) $\log_2(-4x)$; 3) $\log_2(4x)$; 4) $-\log_2(4x)$; 5) $-\log_2(4/x)$.

5. Уравнение $|x^2-4|x|+3|=a$ имеет ровно 4 корня при значениях a, принадлежащих множеству

1) $(2;5)\cup\{0\}$; 2) $(2;4)\cup\{0\}$; 3) $(1;3)\cup\{0\}$; 4) $(1;4)\cup\{0\}$; 5) $(1;5)\cup\{0\}$.

6. Обратная функция к функции

$$y=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$$

имеет вид

1) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2},\ x<0$; 2) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$; 3) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2},\ x>0$; 4) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$; 5) $y=\dfrac{-e^x-e^{-x}}{2}$.

7. Функция $y=f(x)$ определена на множестве всех действительных чисел и является периодической с периодом 5. Значение выражения $f(3)-2f(-7)-f(9)$, если $f(-2)=-4$ и $f(-1)=1,5$, равно

1) $1,5$; 2) $2,5$; 3) $-1,5$; 4) $-2,5$; 5) 2.

8. Сколько целых чисел входит в область определения функции $y=\sqrt{\ln(2x+4-x^2)}$.

9. Сколько целых чисел входит во множество значений функции $y=\sin\dfrac{x}{4}-3$.

10. Найдите значение функции $y=\dfrac{2f(x)}{g(x)}-\dfrac{g(-x)}{f(-x)}$ в точке x_0, если известно, что функция $y=f(x)$ — четная, функция $y=g(x)$ — нечетная, $f(x_0)=1$, $g(x_0)=2$.

12.6. Ответы

Аудиторные задачи:

1. $(-\infty;1/2)\cup(1/2;3/2]$; **2.** $[0,6)$; **3.** $(-\infty,1)\cup[2,+\infty)$; **4.** $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}(\pi/4+\pi n,3\pi/4+\pi n]$; **5.** $[0,4]$; **6.** $[1/\sqrt{2},1]$; **7.** $[-1,1]\setminus\{\pm1/\sqrt{2}\}$; **8.** $[-1/3,1/3]$; **9.** $[1,+\infty)$; **10.** $[-\sqrt{26},\sqrt{26}]$; **11.** $[-1,1]$; **12.** $\{0\}$; **13.** $[-\pi/4,\pi/4]$; **14.** $[3/4,+\infty)$; **15.** $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$; **16.** $g(x)=-4x-2$; **17.** $-5,5$; **18.** 4; **19.** $2/5$; **20.** 2; **21.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$; **22.** $y=x^{-1/3}$; **23.** $y=\log_3(3/x),\ x>0$; **24.** $y=\log_2(x+\sqrt{x^2+2})$; **25.** $g(x)=\log_2(-x/4)$; **26.** $g(x)=-\log_2(-2x)$; **27.** Графики всех функций различны; **28.** $(0,1)$; **29.** При $a\in(-\infty,0)$ нет корней, при $a\in\{0\}\cup(9,+\infty)$ — 2 корня, при $a\in(0,8)\cup\{9\}$ — 4 корня, при $a=8$ — 5 корней, при $a\in(8,9)$ — 6 корней; **30.** $f(f(x))=\dfrac{x}{3x+4}$.

Домашнее задание:

1. $[-2/3,-1/2)\cup(-1/2,+\infty)$; **2.** $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$; **3.** $x\neq\pi/2+\pi n,\ x\neq\pi/4+\pi k,\ k,n\in\mathbb{Z}$; **4.** $x\neq\pm3$; **5.** $(-1,1]$; **6.** $[-5,5]$; **7.** $[-1,5/4]$; **8.** $(-\infty,2]$; **9.** $f(x)=\dfrac{1+x^2}{x^2}$; **10.** $g(x)=x-2$; **11.** -1; **12.** $\dfrac{160}{x^2-16}$; **13.** $y=(1-x)^3$; **14.** $y=1+x^2,\ x\geqslant0$; **15.** $y=\log_2\dfrac{x}{1-x},\ x\in(0,1)$; **16.** $g(x)=\log_3(-9x)$; **17.** Графики первой и третьей функций совпадают; **18.** $(4,5)\cup\{0\}$.

13. Исследование функций

Уравнение касательной к графику функции.

Правила вычисления производных: производные суммы, разности, произведения и частного двух функций. Таблица производных. Производная сложной функции. Максимумы и минимумы (экстремумы) функции, промежутки возрастания и убывания. Общая схема построения графиков функций. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке. Применение производной для решения задач.

13.1. Справочный материал

Операцию взятия производной называют *дифференцированием*. Функцию, у которой существует производная в точке x_0, называют *дифференцируемой* в точке x_0.

Производные элементарных функций

$$(C)'=0;$$

$$(kx+b)'=k;$$

$$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha\in\mathbb{R};$$

$$(e^x)'=e^x;$$

$$(a^x)'=a^x\,\ln a;$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x};$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\,\ln a};$$

$$(\sin x)'=\cos x;$$

$$(\cos x)'=-\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2};$$

$$(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

Правила дифференцирования

Пусть C — постоянная; u, v — дифференцируемые функции. Тогда

$$(Cu)' = Cu';$$
$$(u+v)' = u' + v';$$
$$(uv)' = u'v + uv';$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$
$$(\varphi(f(x))') = \varphi'(f(x)) \cdot f'(x),$$

где $\varphi(f(x))$ — сложная функция.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \quad y_0 = f(x_0),$$

где $(x_0;\, y_0)$ — точка касания; $f'(x_0)$ — угловой коэффициент касательной (или тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси OX).

Монотонные функции и условия монотонности функции

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на интервале (a, b), если для $x_1 \leqslant x_2$ $(x_1, x_2 \in (a, b))$ выполняется неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (большему значению аргумента соответствует большее значение функции).

Функция $y = f(x)$ называется *строго возрастающей* на интервале (a, b), если для $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in (a, b))$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на интервале (a, b), если для $x_1 \leqslant x_2$ $(x_1, x_2 \in (a, b))$ выполняется неравенство $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ (большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции).

Функция $y = f(x)$ называется *строго убывающей* на интервале (a, b), если для $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in (a, b))$ выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Функции возрастающие или убывающие на интервале (a, b) называются *монотонными* на (a, b).

Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема на (a, b). Она является возрастающей на (a, b) в том и только в том случае, когда производная $f'(x) \geqslant 0$ на (a, b).

Функция $y = f(x)$ является убывающей на (a, b) только тогда, когда $f'(x) \leqslant 0$ на (a, b).

Таким образом у монотонной функции производная сохраняет знак.

Экстремумы функций

Точка x_0 является точкой (локального) *максимума* для функции $y=f(x)$, если найдется такой интервал (a,b), $x_0\in(a,b)$, что выполнено неравенство

$$f(x)\leqslant f(x_0) \quad \text{для всех точек} \quad x\in(a,b),$$

принадлежащих ОДЗ функции. Значение $f(x_0)$ называют *максимальным значением* функции.

Точка x_0 является точкой (локального) *минимума* для функции $y=f(x)$, если найдется такой интервал (a,b), $x_0\in(a,b)$, что выполнено неравенство

$$f(x)\geqslant f(x_0) \quad \text{для всех точек} \quad x\in(a,b),$$

принадлежащих ОДЗ функции. Значение $f(x_0)$ называют *минимальным значением* функции.

Точки максимума и минимума называются точками (локального) *экстремума*, а значения функции в этих точках — *экстремальными значениями* функции.

Определения точек максимума и минимума являются локальными (т. е. зависят от поведения функции вблизи этих точек), поэтому у функции может быть несколько максимумов и несколько минимумов в области допустимых значений. Функция также может иметь несколько экстремальных значений в ОДЗ.

Значение функции, которое превосходит все остальные значения функции в ОДЗ называется *наибольшим значением* функции.

Значение функции, которое меньше либо равно всех остальных значений функции в ОДЗ называется *наименьшим значением* функции.

С помощью производных можно находить экстремумы функции.

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема на (a,b) и точка $x_0\in(a,b)$ является точкой экстремума, тогда $f'(x_0)=0$ (это *необходимое условие экстремума функции*).

Данное условие не всегда является достаточным.

Точка x_0 называется *критической* для функции $y=f(x)$, если производная функции $f(x)$ в этой точке равна нулю или не существует.

Критические точки являются точками "подозрительными"на экстремум.

Пусть функция $y=f(x)$ определена и дифференцируема на (a,b), точка $x_0\in(a,b)$ является критической для данной функции. Если при переходе через критическую точку производная $f'(x)$ меняет знак, то x_0 является точкой экстремума, а именно, максимума, если знак меняется с плюса на минус, и минимума, если знак меняется с минуса на плюс. Если же при переходе через критическую точку производная знака не меняет, то x_0 не является точкой экстремума (это *достаточное условие существования экстремума функции*).

Общая схема исследования функции на экстремум заключается в следующем:

1. Находим критические точки функции.

2. Проверяем достаточное условие существования экстремума в критических точках.

Если нужно найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[a,b]$, то к критическим точкам нужно добавить еще концы этого отрезка. Сравнить значения функции в критических точках и в граничных точках, выбрать из них наименьшее и наибольшее значения.

13.2. Примеры

Пример 1. Вычислить значение производной функции

$$f(x)=\frac{3x^2-x+7}{2x+5} \text{ при } x=1.$$

Решение. 1) Полагая $u=3x^2-x+7$, а $v=2x+5$, имеем $f(x)=\dfrac{u}{v}$.

Производная функции такого вида может быть взята по правилу дифференцирования частного:

$$f'(x)=\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Вычислим отдельно производные функций u и v:

$$u'=(3x^2-x+7)'=3\cdot 2x-1=6x-1;$$

$$v'=(2x+5)'=2.$$

Подставляя найденные выражения в последнюю дробь, имеем

$$f(x)=\frac{(6x-1)(2x+5)-(3x^2-x+7)\cdot 2}{(2x+5)^2}=$$

$$=\frac{12x^2-2x+30x-5-6x^2+2x-14}{(2x+5)^2}=\frac{6x^2+30x-19}{(2x+5)^2}.$$

2) Найдем значение производной при $x=1$:

$$f'(1)=\frac{(6\cdot 1+30\cdot 1-19)}{(2\cdot 1+5)^2}=\frac{17}{49}.$$

Ответ: $\dfrac{17}{49}$.

Пример 2. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=\dfrac{3x^2+2}{x-1}$ в точке его пересечения с осью ординат.

Решение. 1) Уравнение касательной записывают в виде $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$, где $(x_0;\, y_0)$ – точка касания. Абсцисса x_0 точки пересечения графика заданной функции с осью Oy равна 0, а ордината $y_0=f(0)=\dfrac{3\cdot 0^2+2}{0-1}=-2$. Таким образом, точка касания $(0;\, -2)$.

2) Найдем производную заданной функции в точке x_0. Используя правила дифференцирования, получим

$$f'(x)=\left(\frac{3x^2+2}{x-1}\right)'=\frac{(3x^2+2)'(x-1)-(3x^2+2)(x-1)'}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{3\cdot 2x(x-1)-(3x^2+2)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{6x(x-1)-3x^2-2}{(x-1)^2}=\frac{3x^2-6x-2}{(x-1)^2}.$$

3) В точке $x_0=0$ имеем

$$f'(0)=\frac{3\cdot 0^2-6\cdot 0-2}{(0-1)^2}=-2.$$

4) Искомое уравнение касательной имеет вид

$$y-(-2)=-2(x-0), \text{или } y+2=-2x,\ \ y=-2x-2.$$

Ответ: $y=-2x-2$.

Пример 3. Вычислить значение производной функции $f(x)=\sin x\times$ $\times\sqrt{2x}+2x+3$ в точке $x=\dfrac{\pi}{2}$.

Решение. $f'(x)=(\sin x\cdot\sqrt{2x})'+(2x)'+3'=(\sin x)'\sqrt{2x}+\sin x\cdot(\sqrt{2x})'+2=\cos x\cdot\sqrt{2x}+$ $+\sin x\cdot\dfrac{(2x)'}{2\sqrt{2x}}+2=\cos x\cdot\sqrt{2x}+\dfrac{\sin x}{\sqrt{2x}}+2.$

Найдем $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\dfrac{\pi}{2}\cdot\sqrt{2\cdot\dfrac{\pi}{2}}+\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2}}{\sqrt{2\cdot\dfrac{\pi}{2}}}+2=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}+2=\dfrac{\sqrt{\pi}}{\pi}+2.$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{\pi}}{\pi}+2$.

Пример 4. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x)=2x^2+x-1$, которая параллельна прямой, заданной уравнением $y=5x+7$.

Решение. Найдем угловой коэффициент касательной: $f'(x_0)=4x_0+1$. Из условия параллельности прямых следует, что их угловые коэффициенты совпадают: $4x_0+1=$ 5, т. е. $x_0=1$. Далее $y_0=f(x_0)=2\cdot 1^2+1-1=2$ и поэтому имеем $y-2=5(x-1)$ или $y=5x-3$.

Ответ: $y=5x-3$.

Пример 5. На графике функции $y=\ln x$ взята точка A. Касательная к графику, проведенная через точку А, наклонена к оси OX под углом, тангенс которого равен $\sqrt{3}$. Найти абсциссу точки A.

Решение. Найдем угловой коэффициент касательной: $y'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$. По условию $\dfrac{1}{x}=\sqrt{3}$, отсюда $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Пример 6. Найти точки экстремума функции

$$f(x)=\frac{x^5}{5}-x^4-5.$$

Решение. Для нахождения точек экстремума функции необходимо найти производную $f'(x)$ и найти значения x, в которых она равна нулю:

$$f'(x)=\left(\frac{x^5}{5}-x^4-5\right)'=\frac{5}{5}x^4-4x^3-0=x^4-4x^3,$$

$$x^4-4x^3=0,\ x^3(x-4)=0.$$

Полученное уравнение имеет два корня $x_1=0$ и $x_2=4$ — это критические точки. Определим знак производной справа и слева от точки $x_1=0$. Для этого вычислим $f'(-1)=(-1)^3\times(-1-4)=5$; $f'(1)=(1)^3\cdot(1-4)=-3$. Следовательно, при переходе через точку $x_1=0$ знак производной меняется с "+"на "−" , т. е. точка $x_1=0$ – точка максимума. Проведя такой же анализ для $x_2=4$, легко убедиться, что это точка минимума.

Ответ: $x_{\max}=0$; $x_{\min}=4$.

Пример 7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\dfrac{x^4}{2}-2x+\dfrac{3}{2}$ на отрезке $[-1;\,2]$.

Решение. Функция достигает своего наибольшего или наименьшего значения на отрезке либо в точках экстремума, либо на концах этого отрезка.

1) Найдем значение функции на концах отрезка $[-1;\,2]$:

$$f(-1)=\frac{(-1)^4}{2}-2(-1)+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}+2+\frac{3}{2}=4;$$

$$f(2)=\frac{2^4}{2}-2\cdot2+\frac{3}{2}=8-4+\frac{3}{2}=\frac{11}{2}.$$

2) Далее, найдем производную данной функции и приравняем ее к нулю:

$$f'(x)=\left(\frac{x^4}{2}-2x+\frac{3}{2}\right)'=\frac{4x^3}{2}-2=2x^3-2,$$

$$2x^3-2=0,\ x^3-1=0,\ x=1.$$

3) Вычислим значение заданной функции в этой точке $x=1$:

$$f(1)=\frac{1^4}{2}-2\cdot1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}-2+\frac{3}{2}=0.$$

Наибольшее значение функции равно $\dfrac{11}{2}$ при $x=2$, а наименьшее значение равно 0 при $x=1$ (на $[-1;\,2]$).

Ответ: $f_{\max}=\dfrac{11}{2}$; $f_{\min}=0$.

Пример 8. Найти числа, сумма которых равна 86, а произведение максимально.

Решение. Число 86 представлено в виде суммы двух слагаемых x и y, т. е.

$$86=x+y.$$

По условию задачи произведение этих слагаемых xy должно быть максимально. Обозначим $g(x;\,y)=xy$ и будем искать максимум функции $g(x;\,y)$. Эта функция зависит от двух переменных x и y, однако, используя условие задачи, ее можно представить в виде функции лишь от одной переменной x:

$$g(x;\,y)=x\cdot y=x(86-x)=86x-x^2=f(x).$$

Теперь легко найти значение x, при котором функция $f(x)$ достигает максимума. Найдем производную $f'(x)$ и приравняем ее к нулю:

$$f'(x)=(86x-x^2)'=86-2x=2(43-x),$$

$$2(43-x)=0,\ x=43.$$

Определим второе слагаемое: $y=86-x=86-43=43$.

Ответ: $x=43$; $y=43$.

13.3. Аудиторные задачи

Найти производные заданных функций $y=y(x)$ при заданных значениях аргумента x_0:

1. $y=4x^3+6x+3,\ x_0=1.$

2. $y=\sqrt{x}-16x+\sin 1,\ x_0=\dfrac{1}{4}.$

3. $y=\dfrac{4x-7}{x^2+4},\ x_0=0.$

4. $y=\dfrac{5-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1},\ x_0=1.$

5. $y=x\sin x,\ x_0=\dfrac{\pi}{2}.$

6. $y=\dfrac{\cos x}{x-1},\ x_0=0.$

7. $y=2x+\cos 2x,\ x_0=\dfrac{\pi}{12}.$

8. $y=3x\operatorname{tg} 2x,\ x_0=0.$

9. $y=3x^2-\ln x,\ x_0=1.$

10. $y=2\ln(\cos x)+8x^3,\ x_0=\dfrac{\pi}{4}.$

11. $y=3\ln^2 x+\dfrac{4}{x}+1,\ x_0=e.$

12. $y=\sqrt{x}\cdot\operatorname{tg} 3x+5,\ x_0=\dfrac{\pi}{12}.$

13. $y=(6x^3-x)e^{\cos x}+1,\ x_0=\pi.$

14. $y=\operatorname{tg}(\sin x)-4x^3,\ x_0=\pi.$

Найти производные следующих функций:

15. $y=x^2\cdot\sqrt[4]{x^3}.$

16. $y=x+\arcsin 3x.$

17. $y=\sin x^2\cdot\operatorname{arctg} 2x.$

18. $y=\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 3x}.$

Найти производные заданных функций $y=y(x)$ при заданных значениях аргумента x_0:

19. $y=5x^2\sqrt{x}-\dfrac{64}{x^{3/2}},\ x_0=4.$

20. $y=10^x\dfrac{1}{\ln 10}+\dfrac{4}{x^2}-5x-7,\ x_0=2.$

21. $y=(3x^2-7x+2)(1-2x-5x^2),\ x_0=1.$

22. $y=(5-3x)\cos x,\ x_0=\pi.$

23. $y=\sqrt[4]{3-2x^2}$, $x_0=1$.
24. $y=\sqrt{\operatorname{tg} 3x}$, $x_0=\dfrac{\pi}{12}$.
25. $y=\sqrt{2(1-\cos^2 x)}$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.
26. $y=x(x-1)(x-2)\cdots(x-10)$, $x_0=5$.
27. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$, $x_0=0$.
28. $y=\sqrt{1+5x}$, $x_0=\dfrac{3}{5}$.
29. Найти уравнение касательной к графику функции $y=x^5+3x+2$ в точке с абсциссой 1.
30. Касательная к параболе $y=x^2+mx+16$ проходит через начало координат. Найти значение параметра m, при котором абсцисса точки касания положительна, а ордината равна 8.
31. Известно, что график функции $y=x^3+ax^2+bx+c$ касается прямой $y=4x+4$ в точке с абсциссой -1 и пересекает эту прямую в точке с абсциссой 0. Найти a, b, c.
32. Найти значение x, при котором касательная к графику функции $f(x)=24\cdot 2^{x+5}$ с угловым коэффициентом $k=3\cdot\ln 2$ пересекает ось абсцисс.
33. Через точку $(3,-4)$ проходят две касательные к графику функции $f(x)=4+\dfrac{3}{x}$. Найти сумму абсцисс точек касания.
34. Найти уравнения касательных к параболе $y=x^2$, проходящих через точку $(2,3)$.
35. Найти углы между кривыми $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$ в их точках пересечения.
36. В каких точках касательная к параболе $y=x^2$ параллельна прямой $y=4x-5$ и перпендикулярна прямой $2x-6y+5=0$?
37. При каких p и q парабола $y=x^2+px+q$ касается прямой $y=3x-2$ в точке с абсциссой 0?
38. Найти угол между кривыми $y=\sin x$ и $y=\cos x$ в их точках пересечения.
39. В каких точках касательная к параболе $y=x^2$ образует с прямой $3x-y+1=0$ угол в $45°$?
40. Доказать, что отрезок любой касательной к гиперболе $y=\dfrac{1}{x}$, заключенный между осями координат, делится точкой касания пополам.
41. В какой точке кривой $y=x^2-1$ касательная перпендикулярна прямой $-2x-y+1=0$?
42. На кривой $y=x^2-3x+2$ найти точку, касательная к которой параллельна прямой $y=-5x+3$.
43. Найти значение x_0, при котором касательная к графику функции $y=9x-x^3+2$ в точке с абсциссой x_0 отсекает от положительной полуоси абсцисс втрое больший отрезок, чем от отрицательной полуоси ординат.
44. Вычислить площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y=\dfrac{x}{2x-1}$ в точке с абсциссой $x_0=1$.
45. Найти уравнение общей касательной к кривым

$$y=x^2+4x+8,\quad y=x^2+8x+4.$$

46. Найти все значения x_0, при которых касательные к графикам функций

$$y=3\cos 5x, \quad y=5\cos 3x+2$$

в точках с абсциссой x_0 параллельны.

47. Хорда параболы $y=-a^2x^2+5ax-4$ касается кривой $y=\dfrac{1}{1-x}$ в точке $x=2$ и делится этой точкой пополам. Найти a.

48. Определить, под каким углом синусоида

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 3x$$

пересекает ось абсцисс в начале координат?

Найти экстремумы функций:

49. $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-2x+3$.

50. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.

51. $y=x-e^x$.

52. $y=x+\dfrac{1}{x^2}$.

53. $y=x\ln x$.

54. Пусть производная функции $f(x)$ имеет вид

$$f'(x)=(x-1)(x^2-1)(x^2-4).$$

Найти число точек экстремума.

Найти наибольшее и наименьшее значение функций на заданных отрезках:

55. $y=x+\dfrac{1}{x}$ на $[-2,-1/2]$.

56. $y=x^4-2x^2+3$ на $[-4,3]$.

57. $y=1+\cos x$ на $[-\pi/3,\pi/3]$.

58. Найти интервал убывания функции

$$y=16x^3-24x^2+9x-1.$$

59. Найти интервал возрастания функции

$$y=-8x^3+55x^2-100x-58.$$

60. Найти $\dfrac{m}{2}+4M$, где m и M, соответственно, наименьшее и наибольшее значения функции $y=\dfrac{x}{8}+\dfrac{2}{x}$ на отрезке $[1,6]$.

61. Найти $m+2M$, где m и M — значения функции $f(x)=x+\dfrac{4}{x-3}$ в точках минимума и максимума соответственно.

Найти точки экстремумов функций:

62. $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x$.

63. $y = x + \dfrac{1}{x}$.

64. $y = \operatorname{tg} x - 2x$ на промежутке $(-\pi, \pi)$.

Найти наименьшие значения функций на заданных отрезках:

65. $y = \dfrac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2 + 2$ на $[-3, 1]$.

66. $y = \dfrac{48}{5}x^5 - 3x + 5$ на $[-1, 1]$.

67. $y = \dfrac{4}{x^2} + x^2$ на $[1, 2]$.

Найти наименьшие и наибольшие значения функций на заданных отрезках:

68. $y = 7 + 4x^3 - x^4$ на $[-1, 3]$.

69. $y = \cos 2x - x$ на $[-\pi/2, \pi/2]$.

70. $y = \dfrac{x}{3} - \sqrt[3]{x}$ на $[-1, 1/8]$.

71. Найти наибольшее значение функции $f(x) = \left|4x\ln 2 - 2^x + 5\ln 2\right|$ на отрезке $[-1, 6]$.

72. Найти точку, в которой выполняется необходимое условие экстремума функции $y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2$, но экстремума в ней нет.

73. Найти все значения параметра a, при которых функция $f(x) = 1 - x^3 + ax^2 - 3ax$ убывает на $\mathbb{R}$.

74. При каких значениях параметра a наименьшее значение функции $y = x + e^{a-x}$ равно 4?

75. Каковы должны быть стороны прямоугольного участка, периметр которого 120 м, чтобы площадь этого участка была наибольшей?

76. Прямоугольный участок земли площадью 4 га огораживается забором. Каковы должны быть размеры участка, чтобы периметр был наименьшим?

77. Число 48 представлено в виде суммы двух слагаемых так, что их произведение максимально. Найти эти слагаемые.

78. Найти число, которое превышало бы свой утроенный квадрат на максимальное значение.

79. Число 64 представлено в виде произведения двух положительных сомножителей так, что сумма их квадратов минимальна. Найти эти множители.

80. Найти число, для которого разность его куба и утроенного его квадрата минимальна.

81. Найти положительное число, сумма которого со своей обратной величиной имеет наименьшее значение.

82. Какую наибольшую площадь может иметь трапеция, три стороны которой равны a ?

83. Какой сектор нужно вырезать из данного круга, чтобы из оставшейся части можно было свернуть воронку наибольшей вместимости?

84. Исследовать и построить график функции $y = \dfrac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 2$.

85. Найти все значения параметра b, для которых уравнение

$$2x^3 - 3x^2 - 12x - b = 0$$

имеет три различных корня.

13.4. Домашнее задание

Найти производные заданных функций $y=y(x)$ при заданных значениях аргумента x_0:

1. $y=\dfrac{\ln x}{x+1}$, $x_0=1$.

2. $y=3^x\dfrac{2}{\ln 3}-2x^3-3$, $x_0=2$.

3. $y=\dfrac{1}{3}x^3-\sqrt{x}+3\ln x$, $x_0=1$.

4. $y=\dfrac{2-3x}{x-1}$, $x_0=2$.

5. $y=\dfrac{2\sqrt{x}}{2-x}$, $x_0=1$.

6. $y=\sin x(x^2-2x+3)$, $x_0=0$.

7. $y=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3x^2-1}}$, $x_0=1$.

8. $y=\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^5 x}}$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

9. $y=(x^2-3x+1)e^x$, $x_0=0$.

10. $y=\sin^2 2x+1$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

11. $y=\dfrac{2\operatorname{ctg} 3x}{x^2}+\cos\dfrac{\pi}{16}$, $x_0=\dfrac{\pi}{12}$.

12. В какой точке кривой $y=-x^2+2$ касательная перпендикулярна прямой $x-y+1=0$?

13. Найти сумму координат точки с отрицательной абсциссой, касательная в которой к графику функции $f(x)=x^2+2x+4$ проходит через начало координат.

14. Если прямая $y=3-5x$ является касательной к параболе $y=x^2+bx+c$ в точке с абсциссой 0, то чему равна сумма $b+c$?

15. Найти значение x, при котором касательная к графику функции $f(x)=8\cdot 2^{x-3}$ с угловым коэффициентом $k=2\ln 2$ пересекает ось абсцисс.

16. Через точку $(2,-5)$ проходят две касательные к графику функции $f(x)=-3\sqrt{x}+1$. Найти сумму абсцисс точек касания.

17. Написать уравнение касательной к кривой $y=\ln(x-1)$, параллельной прямой $y=2x-1$.

18. Найти угол с осью абсцисс касательной к кривой $y=x\ln x$, проведенной в точке пересечения этой кривой с осью абсцисс.

19. При каких значениях параметра a прямая $y=ax-2$ касается графика функции $y=1+\ln x$?

20. Найти координаты точек пересечения с осью Ox тех касательных к графику функции

$$y=\frac{x+1}{x-3},$$

которые образуют с осью Ox угол $\dfrac{3\pi}{4}$.

21. В какой точке кривой
$$y=x^2-5x+6$$
следует провести касательную для того, чтобы она прошла через точку $M(1,1)$?

22. Найти значение x_0, при котором касательная к графику функции $y=7x-x^3-3$ в точке с абсциссой x_0 отсекает от положительной полуоси абсцисс втрое больший отрезок, чем от отрицательной полуоси ординат.

23. Показать, что семейства кривых, задаваемых уравнениями
$$y=ax, \quad y^2+x^2=c^2,$$
при любых a, c пересекаются под прямым углом.

Найти значения функций в точках максимума:

24. $y=2x^3-\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{3}{8}$.

25. $y=\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{1}{3}x^3+71\dfrac{13}{15}$.

26. $y=\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{5}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+5$.

27. Найти точку минимума функции $f(x)=-9x^5+90x^4-180x^3-30$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функций на заданных отрезках:

28. $y=x^3-6x^2+1$ на $[-1,2]$.

29. $y=\sin x\cdot\sin 2x$ на полном периоде.

30. Найти значение выражения $m-3M$, если m и M — наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=-2x^3-3x^2+12x-16$ на отрезке $[-1,2]$.

31. Найти наибольшее и наименьшее значения функции
$$y=-x^2+3|x|-2$$
на отрезке $[-2,0]$.

32. Найти наибольшее значение функции $f(x)=\left|9x\ln 3-3^x-8\ln 3\right|$ на отрезке $[1,4]$.

33. Пусть m и M — значения функции $y=-0,2x^5+x+4$ в точке минимума и точке максимума соответственно. Найти $\dfrac{m}{M}$.

34. Вычислить сумму целых значений x, не превышающих по модулю 5 и принадлежащих промежуткам убывания функции $f(x)=-4x^3-6x^2+45x+25$.

35. Найти количество целых точек на интервале убывания функции
$$y=4x^3+12x^2-63x+62.$$

36. Найти все значения параметра a, при которых функция $f(x)=x^5-2ax^3+11ax+1$ возрастает на $\mathbb{R}$.

37. Разделить число 8 на две такие части, чтобы произведение их произведения на разность было максимальным.

38. Найти число, для которого разность между ним и его утроенным кубическим корнем была минимальной.

39. Вписать в заданный шар цилиндр максимального объема.

13.5. Проверочный тест

1. Если прямая $y=7x-3$ является касательной к параболе $y=ax^2+bx+c$ в точке с абсциссой 0, то $b+c$ равно

1) 10; 2) -10; 3) 4; 4) -4; 5) 3.

2. Угол между кривыми

$$xy=a^2, \quad x^2-y^2=b^2$$

в их точках пересечения равен

1) 0; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{3}$; 5) $\arcsin\frac{b}{a}$.

3. Если касательная к графику функции $f(x)=2x^2-2$ перпендикулярна прямой $x-4y+1=0$, то точка касания имеет координаты

1) $(-1/4, 15/16)$; 2) $(-1, 0)$; 3) $(-1/4, 15/8)$; 4) $(1, 0)$; 5) $(1/2, 3/4)$.

4. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x)=x^4-0,5x+5$ в точке с абсциссой $x_0=-1$.

1) -3; 2) $-4,5$; 3) 3; 4) $4,5$; 5) $-3,5$.

5. Сумма наибольшего и наименьшего значений функции

$$y=x+\cos^2 x$$

на отрезке $[0, \pi/2]$ равна

1) $\frac{1+\pi}{2}$; 2) $1+\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{3}{4}+\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}$; 5) π.

6. Число 26 представлено в виде суммы трех положительных чисел так, что сумма их квадратов наименьшая, причем второе слагаемое втрое больше первого. Тогда произведение этих чисел равно

1) 4; 2) 12; 3) 120; 4) 480; 5) 48.

7. В полукруг радиуса 1 вписывается прямоугольник, одна из сторон которого лежит на диаметре полукруга. Наибольшая возможная площадь такого прямоугольника равна

1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 2) 1; 3) 2; 4) $\sqrt{2}$; 5) 3.

8. Найти в градусах угол, который образует касательная к графику функции $y=x\sqrt{4x+1}$ в точке $x_0=0$ с положительным направлением оси OX.

9. Найти сумму координат точки, в которой касательная к графику функции $y=x^2-3x+2$ параллельна прямой $y=3x+1$.

10. Из всех равнобедренных треугольников с периметром 18 найдите треугольник с наибольшей площадью. В ответе записать произведение длин всех сторон этого треугольника.

13.6. Ответы

Аудиторные задачи:

1. 18; **2.** -15; **3.** 1; **4.** -4; **5.** 1; **6.** 1; **7.** 1; **8.** 0; **9.** 5; **10.** $\dfrac{3}{2}\pi^2-2$; **11.** $\dfrac{6}{e}-\dfrac{4}{e^2}$; **12.** $\sqrt{\dfrac{3}{\pi}}+3\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}$; **13.** $\dfrac{18\pi^2-1}{e}$; **14.** $-1-12\pi^2$; **15.** $\dfrac{11}{4}\cdot x\cdot\sqrt[4]{x^3}$; **16.** $1+\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$; **17.** $2x\cos x^2\cdot\operatorname{arctg}2x+\sin x^2\cdot\dfrac{2}{1+4x^2}$; **18.** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}3x}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 3x}$; **19.** 103; **20.** 94; **21.** 30; **22.** 3; **23.** -1; **24.** 3; **25.** 1; **26.** $-14\,400$; **27.** 2; **28.** $\dfrac{5}{4}$; **29.** $y=8x-2$; **30.** -6; **31.** $c=4$, $a=2$, $b=5$; **32.** $-\dfrac{8\ln 2+1}{\ln 2}$; **33.** -0,75; **34.** $y=2x-1$ и $y=6x-9$; **35.** 90° и $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}\approx 37^\circ$; **36.** В точке $(2,4)$ касательная параллельна заданной прямой, а в точке $(-3/2, 9/4)$ касательная перпендикулярна заданной прямой; **37.** $p=3$, $q=-2$; **38.** $\operatorname{arctg}2\sqrt{2}\approx 70,5^\circ$; **39.** $x=-1$; **41.** $(1/4,-15/16)$; **42.** $(1,-3)$; **43.** $-\dfrac{\sqrt{26}}{3}$; **44.** 2; **45.** $y=8x+4$; **46.** πn, $\pi/8+\pi n/4$, $n\in\mathbb{Z}$; **47.** $a=1$. *Указание*: условие пересечения прямой и параболы равносильно существованию двух различных корней соответствующего квадратного уравнения, полусумма абсцисс этих корней по условию задачи должна быть равной 2; **48.** $\dfrac{\pi}{3}$; **49.** $-\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{25}{6}$; **50.** $\pm\dfrac{1}{2}$; **51.** -1; **52.** $3/\sqrt[3]{4}$; **53.** $-\dfrac{1}{e}$; **54.** 3; **55.** -2 и $-2,5$; **56.** 227 и 2; **57.** 1,5 и 2; **58.** $(1/4, 3/4)$; **59.** $(5/4, 10/3)$; **60.** 9; **61.** 5; **62.** $x=1$ — точка максимума, $x=3$ — точка минимума; **63.** $x=1$ — точка минимума, $x=-1$ — точка максимума; **64.** Точка $x=\pi/4$ есть точка минимума, точка $x=-\pi/4$ есть точка максимума, точка $x=3\pi/4$ есть точка максимума, а точка $x=-3\pi/4$ есть точка минимума; **65.** -2; **66.** $-1,6$; **67.** 4; **68.** Наибольшее значение равно 34, а наименьшее равно 2; **69.** Наибольшее значение равно $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{6}$, а наименьшее значение равно $-1-\dfrac{\pi}{2}$; **70.** Наибольшее значение равно $\dfrac{2}{3}$, а наименьшее значение равно $-\dfrac{11}{24}$; **71.** $64-29\ln 2$; **72.** $x=2$; **73.** $0\leqslant a\leqslant 9$; **74.** $a=3$; **75.** 30, 30; **76.** 200, 200; **77.** 24, 24; **78.** $\dfrac{1}{6}$; **79.** 8, 8; **80.** 2; **81.** 1; **82.** $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$; **83.** $2\pi-2\sqrt{\dfrac{2}{3}}\pi$; **85.** $b\in(-20,7)$.

Домашнее задание:

1. 1/2; **2.** -6; **3.** 3,5; **4.** 1; **5.** 3; **6.** 3; **7.** $-1,5$; **8.** 5; **9.** -2; **10.** 0; **11.** $-\dfrac{25\,920}{\pi^3}$; **12.** $(1/2, 7/4)$; **13.** 2; **14.** -2; **15.** $\dfrac{\ln 2-1}{\ln 2}$; **16.** 12; **17.** $y=2x-3-\ln 2$; **18.** 45°; **19.** $a=e^2$; **20.** (8, 0), (0, 0); **21.** (2, 0), (0,6); **22.** $-\dfrac{\sqrt{20}}{3}$; **24.** 1; **25.** 72; **26.** 5; **27.** 2; **28.** 1 и -15; **29.** $-\dfrac{4}{9}\sqrt{3}$ и $\dfrac{4}{9}\sqrt{3}$; **30.** -2; **31.** 0,25 и -2; **32.** $81-28\ln 3$; **33.** $\dfrac{2}{3}$; **34.** 2; **35.** 5; **36.** $0\leqslant a\leqslant\dfrac{55}{9}$; **37.** $4+\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ и $4-\dfrac{4}{\sqrt{3}}$; **38.** 1; **39.** Отношение высоты цилиндра к диаметру основания равно $\sqrt{2}$.

14. Планиметрия. Основные понятия

Смежные и вертикальные углы, их свойства. Перпендикуляр и наклонная. Свойство серединного перпендикуляра к отрезку. Признаки параллельности прямых. Теорема Фалеса. Свойство средней линии треугольника. Треугольники. Признаки равенства треугольников. Правильный треугольник. Равнобедренный треугольник и его свойства. Медиана, биссектриса, высота треугольника. Сумма величин внутренних углов треугольника и выпуклого многоугольника. Теорема о внешнем угле треугольника. Свойства углов с соответственно параллельными и перпендикулярными сторонами. Теоремы синусов и косинусов. Решение треугольников. Прямоугольный треугольник и метрические соотношения в нем. Катет и гипотенуза. Теорема Пифагора. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Окружность, круг.

14.1. Справочный материал

Признаки равенства треугольников. Два треугольника равны, если выполняется одно из следующих условий:

1) две стороны и угол одного треугольника, заключенный между ними, равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника;

2) сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника;

3) три стороны одного треугольника равны трем соответствующим сторонам другого треугольника.

Формулы вычисления площади треугольника (рис.16).

Пусть стороны треугольника равны a, b, c, полупериметр $p=\dfrac{a+b+c}{2}$, радиус вписанной в треугольник окружности r, радиус описанной окружности R, h_a, h_b, h_c — высоты, опущенные на соответствующие стороны. Тогда площадь треугольника S можно найти по следующим формулам

$$S=\frac{1}{2}h_a a=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{abc}{4R}=p\cdot r.$$

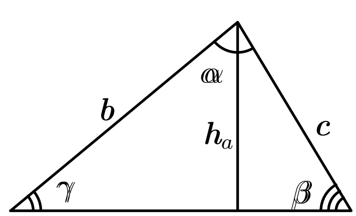

Рис. 16

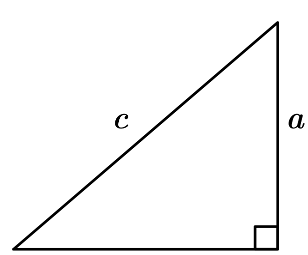

Рис. 17

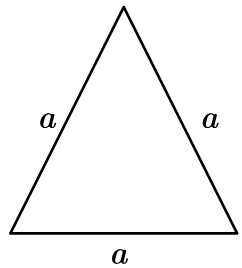

Рис. 18

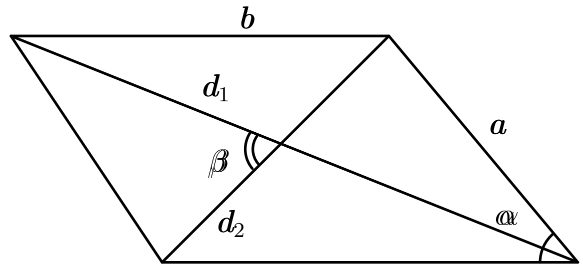

Рис. 19

Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R.$$

Теорема косинусов

$$c^2=a^2+b^2-2ab\,\cos\gamma.$$

Линии в треугольнике и их свойства

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны. Медианы обычно обозначаются m_a, m_b, m_c.

Свойства медиан:

1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.

2. Медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника.

Высотой треугольника называется отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на противоположную сторону или на ее продолжение.

Высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Биссектрисой треугольника называется отрезок прямой, делящий один из углов треугольника на две равные части.

Свойства биссектрис:

1. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром вписанной окружности.

2. Биссектриса треугольника есть геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла.

3. Биссектриса треугольника делит сторону треугольника на части, пропорциональные прилежащим к ней сторонам.

Центр описанной около треугольника окружности лежит в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из середин сторон треугольника.

Треугольники специального вида

Прямоугольный треугольник (рис. 17) — это треугольник, один из углов которого прямой. Сторона, лежащая против прямого угла называется *гипотенузой*, а остальные стороны — *катетами*.

Свойства прямоугольного треугольника:

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad \textit{теорема Пифагора.}$$

$$r = \frac{a+b-c}{2}; \quad R = \frac{c}{2}.$$

Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.

Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.

Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы.

Равнобедренный треугольник — это треугольник, у которого две стороны равны. Эти стороны называются боковыми, а третья сторона — *основанием.*

Свойства равнобедренного треугольника:

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является медианой, биссектрисой и осью симметрии треугольника.

Равносторонний треугольник (рис. 18) — это треугольник, у которого все стороны равны. Углы в равностороннем треугольнике равны 60°.

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Длина окружности L и площадь круга S (рис. 21) вычисляются по формулам:

$$L = 2\pi R; \quad S = \pi R^2.$$

Длина дуги окружности равна $l = R\cdot\alpha$. Площадь сектора равна $S = \dfrac{\beta}{2}R^2$; $S = \dfrac{\beta^\circ}{360^\circ}\pi R^2$.

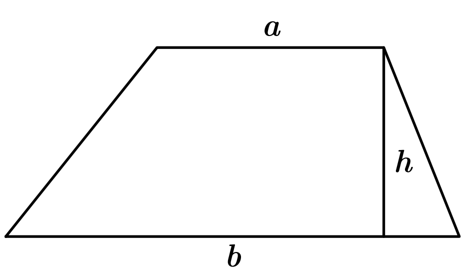

Рис. 20

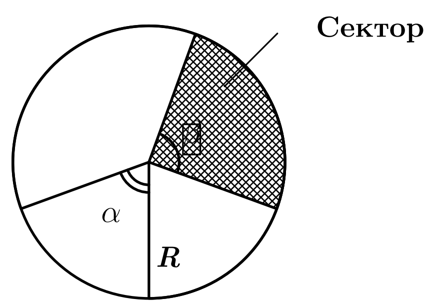

Рис. 21

Если из точки, лежащей вне круга, проведены к окружности касательная и секущая, то произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной.

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

14.2. Примеры

Пример 1. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки 5 см и 12 см. Найти катеты треугольника.

Решение. В $\triangle ABC$ (рис. 22) угол C прямой, $AD=5$ см, $DB=12$ см, E и F – точки касания вписанной окружности и соответствующих катетов.

$AD=AF$, $BD=BE$, $FC=EC$ по свойству касательных к окружности, проведенных из одной точки. Пусть $EC=x$, тогда по теореме Пифагора для $\triangle ABC$ можно записать

$$(5+x)^2+(12+x)^2=(5+12)^2,\ x_1=3;\ x_2=-20 \text{ (не подходит).}$$

Итак, $AC=5+3=8$ см, $BC=12+3=15$ см.

Ответ: 8 см, 15 см.

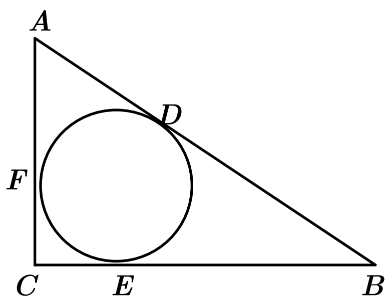

Рис. 22

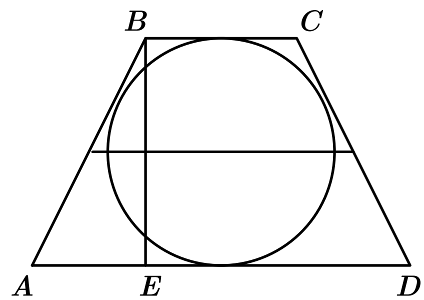

Рис. 23

Пример 2. Найти длину основания равнобедренного треугольника, площадь которого равна 25 см^2, а углы α при основании таковы, что $\operatorname{tg}\alpha=4$.

Решение. В треугольнике ABC (рис. 24) $BD\perp AC$, $AB=BC$. По свойству равнобедренного треугольника $AD=DC$. Обозначим $BD=h$, $AD=a$, тогда

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{h}{a};$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}h\cdot 2a=ah.$$

Получили систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{h}{a}=4, \\ ah=25, \end{cases}$$

$h=4a$, $4a^2=25$, $a=2,5$ или $a=-2,5$ (не подходит). Отсюда в треугольнике ABC основание $AC=2a=5$.

Ответ: 5 см.

Пример 3. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, а проекция другого катета на гипотенузу равна 16 см. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник.

Решение. Воспользуемся формулой $r=\dfrac{S}{p}$. Для этого вычислим все стороны треугольника. На рис. 25 $BC\perp AC$, $AC=15$ см, $CD\perp AB$, $BD=16$.

Обозначим $AD=x$, $BC=y$. Для $\triangle ABC$ по теореме Пифагора $AC^2+BC^2=AB^2$, или $15^2+y^2=(x+16)^2$. Для $\triangle ADC$ по теореме Пифагора $AD^2+DC^2=AC^2$ или $DC^2=AC^2-AD^2$. Для $\triangle BDC$ по теореме Пифагора $BD^2+DC^2=BC^2$ или $DC^2=BC^2-BD^2$.

Следовательно, $AC^2-AD^2=BC^2-BD^2$, $15^2-x^2=y^2-16^2$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} 225+y^2=x^2+32x+256, \\ 225-x^2=y^2-256. \end{cases}$$

Складывая уравнения, получаем, что $450+y^2-x^2=x^2+y^2+32x$, $2x^2+32x-450=0$, $x_1=9$; $x_2=-25$ (не подходит); $y=20$.

Итак, $AC=15$, $BC=20$, $AB=25$, тогда

$$r=\frac{AC+BC-AB}{2},$$
$$r=\frac{15+20-25}{2}=5.$$

Ответ: 5 см.

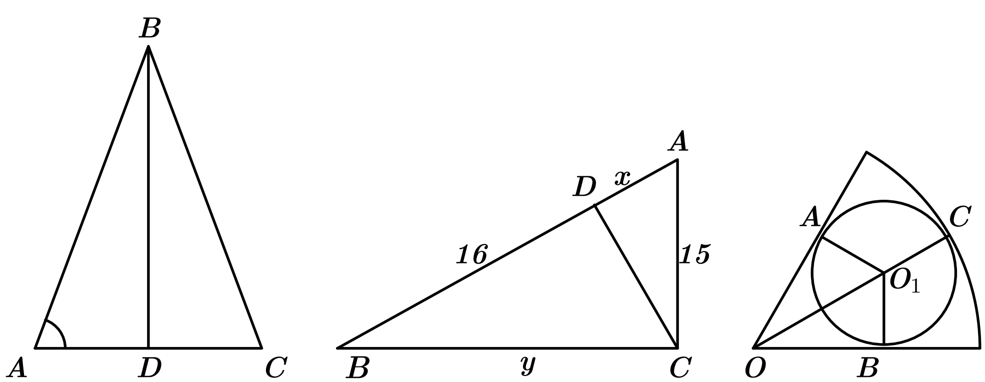

Рис. 24 **Рис. 25** **Рис. 26**

Пример 4. В круговой сектор, дуга которого содержит 60°, вписан круг. Найти отношение площади сектора к площади этого круга.

Решение. На рис. 26 O_1A — радиус круга, проведенный в точку касания. Поэтому $O_1A\perp OA$. Аналогично $O_1B\perp OB$.

$\triangle OBO_1=\triangle OAO_1$ (прямоугольные треугольники с общей гипотенузой и равными катетами: $O_1A=O_1B$). Следовательно, $\angle O_1OA=\dfrac{1}{2}\angle AOB$, т. е. $\angle O_1OA=30°$. Отсюда $O_1A=OO_1\sin 30°=0,5\cdot O_1O$; $OC=OO_1+O_1C$.

Если обозначить радиус круга r, а радиус кругового сектора R, то $R=3r$. Площадь круга $S_{\text{кр}}=\pi r^2$, площадь сектора

$$S_{\text{сектора}}=\frac{60°}{360°}\pi R^2=\frac{1}{6}\pi(3r)^2=\frac{3}{2}\pi r^2.$$

$$\frac{S_{\text{сектора}}}{S_{\text{круга}}}=\frac{\frac{3}{2}\pi r^2}{\pi r^2}=1,5.$$

Ответ: 1,5.

14.3. Аудиторные задачи

1. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 6. Другой катет равен 8. Найти длину медианы, проведенной к гипотенузе.

2. В прямоугольном треугольнике медиана, опущенная из прямого угла, равна одному из катетов. Найти меньший угол треугольника.

3. В равнобедренном треугольнике основание равно $\frac{36}{\sqrt{3}}$, угол при вершине 120°. Определить проекцию высоты на боковую сторону.

4. Треугольник с периметром 24 см делится высотой на два треугольника с периметрами 14 см и 18 см. Найти эту высоту.

5. Высота равнобедренного треугольника равна 15. Основание больше боковой стороны на 15. Найти основание.

6. В треугольнике ABC угол A равен 120°, стороны $AB=3$, $AC=2$. Найти квадрат стороны BC.

7. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE, CF. Длины отрезков AF, AE, BD равны соответственно 3, 4, 5. Вычислить периметр треугольника.

8. Из вершины прямого угла A прямоугольного треугольника к гипотенузе проведена медиана AM и высота AK. Найти длину отрезка MK, если катеты равны 6 и $3\sqrt{5}$.

9. В прямоугольный треугольник с катетами 3 и 5 вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найти периметр квадрата.

10. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан прямоугольник таким образом, что он имеет с треугольником общий прямой угол. Периметр этого прямоугольника равен 25. Найти катет треугольника.

11. Найти высоту равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна 5, а косинус угла при вершине равен $-\frac{7}{25}$.

12. Периметры подобных треугольников относятся как 2:3, сумма их площадей равна 260. Найти площадь большего треугольника.

13. Внутри треугольника ABC проведена к стороне BC прямая AD так, что угол CAD равен углу ACD. Периметры треугольников ABC и ABD равна 18 и 11. Найти длину AC.

14. В остроугольном треугольнике ABC, площадь которого 10, сторона AC равна 5, $\operatorname{tg}\angle BAC=4$. Найти величину угла между сторонами AC и BC.

15. В треугольнике со сторонами a, b, c на сторону c опущена высота h. Найти ее длину, если $a=4$, $b=3$, $c=5$.

16. Из вершины треугольника с основанием $a=60$ проведены к a высота $h=12$ и медиана $m=13$. Найти большую боковую сторону.

17. В треугольник вписан ромб, угол которого совпадает с углом треугольника. Стороны треугольника, заключающие этот угол, равны 12 и 18. Найти сторону ромба.

18. В треугольнике ABC величина угла при вершине C равна $\frac{\pi}{6}$. Найти синус угла B, если $AC{=}12{,}3$, $AB{=}61{,}5$.
19. В треугольнике ABC даны три стороны $a=\sqrt{10}$, $b=2$, $c=3$. Найти его медиану m_a.
20. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C катет $AC=9$, медиана $CM=5$. Найти расстояние между точкой M и основанием H высоты CH.
21. В равнобедренном прямоугольном треугольнике медианы, проведенные к катетам, равны l. Найти площадь треугольника.
22. Биссектриса прямоугольного треугольника делит катет на отрезки длиной 3 и 5. Найти медиану, проведенную к гипотенузе.
23. В треугольнике основание равно 12, один из углов при основании равен $120°$, сторона, лежащая против этого угла, равна 28. Определить третью сторону.
24. Основание треугольника равно 20. Медианы боковых сторон равны 24 и 18. Найти площадь треугольника.
25. Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника равны соответственно 10 и 26. Найти радиус вписанной окружности.
26. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны $30°$. А само основание равно $3\sqrt{3}$. Найти радиус описанной окружности.
27. В окружности радиуса $\frac{7,2}{\pi}$ найти длину дуги, содержащей $100°$.
28. Из точки на окружности проведены диаметр и хорда, длина которой равна 30, проекция хорды на диаметр относится к радиусу окружности как 18:25. Найти радиус окружности.
29. Длина окружности равна $8\pi\sqrt{3}$. Найти длину хорды, стягивающей дугу $120°$.
30. В окружности с центром в точке O проведены радиус OD и хорда AB, которые пересекаются в точке C, причем известно, что $AB\perp OD$, $OC=9$, $CD=32$. Найти хорду.
31. В окружности проведены две пересекающиеся хорды, одна из которых делится точкой пересечения на отрезки 3 и 12, а другая — пополам. Найти длину второй хорды.
32. К окружности радиуса 5 проведена касательная в точке B. На касательной отмечена точка A на расстоянии 12 от точки B. Найти расстояние от точки A до центра окружности.
33. В окружности, радиус которой равен 11, проведены две хорды AB и AC. Угол между ними равен $30°$. Найти расстояние между B и C.
34. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания окружности и гипотенузы делит ее на отрезки 3 и 10. Найти больший катет.
35. Окружность, проходящая через вершины A и C треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно, отрезки AN и CM пересекаются в точке K, $\angle ABC=25°$ и $\angle MCN=35°$. Найти величину угла AKC в градусах.
36. Радиусы вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника равны соответственно 2 и 5. Найти больший катет треугольника.
37. Найти радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием 16, высотой 4.

38. Найти радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 8, 15, 17.
39. Окружность касается большего катета прямоугольного треугольника и проходит через вершину противолежащего острого угла. Найти радиус окружности, если ее центр лежит на гипотенузе, а длины катетов равны 3 и $2\sqrt{10}$.
40. Величина угла ABC, образованного хордами AB и BC, равна 96°. Найти дугу AB (в градусах), если $AB=BC$.
41. В окружности перпендикулярно диаметру AB проведена хорда CD. Точка их пересечения делит диаметр на отрезки 18 и 32. Найти длину хорды CD.
42. Две окружности, каждая из которых вписана в острый угол 60°, касаются друг друга внешним образом. Найти расстояние от точки касания окружностей до стороны угла, если радиус большей окружности равен 23.
43. В круговой сектор вписана окружность, радиус которой в три раза меньше радиуса сектора. Найти величину центрального угла.
44. Концы диаметра удалены от касательной на 1,6 и 0,6. Найти длину диаметра.
45. Из одной точки проведены к окружности две касательные. Длина каждой касательной равна 13, а расстояние между точками касания равно 24. Найти радиус окружности.
46. Из точки K, лежащей на окружности, проведены касательная к окружности и хорда KA. Угол между ними равен 60°. Найти длину меньшей дуги, отсекаемой хордой KA, если радиус окружности равен $\frac{3}{\pi}$.
47. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 60°. Найти радиусы окружностей, если расстояние между их центрами равно $\sqrt{3}+1$.
48. Две окружности, радиусы которых равны 4 и 8, пересекаются под прямым углом. Определить длину их общей касательной.

14.4. Домашнее задание

1. В треугольнике ABC проведена медиана AK, равная $\frac{13\sqrt{2}}{4}$ и составляющая со стороной AC угол 30°. Найти BC, если $\angle BCA=45°$.
2. BD — высота треугольника ABC. Из точки D на сторону BC опущен перпендикуляр DE. Найти BD, если $EC=4$, $DE=3$.
3. В равнобедренном треугольнике длина основания равна 30, длина высоты, проведенной к основанию, равна 20. Найти длину высоты, проведенной к боковой стороне.
4. В треугольнике ABC известно, что $\angle A=45°$ и $\operatorname{ctg}\angle B=0,25$. Найти сторону AB, если площадь треугольника равна 10.
5. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на гипотенузе, а две другие — на катетах. Сторона квадрата равна 3. Найти длину гипотенузы.
6. Найти длину основания равнобедренного треугольника, площадь которого равна 25, а углы при основании таковы, что их тангенс равен 4.
7. Одна из сторон треугольника на 3 см меньше другой, высота делит третью сторону на отрезки длиной 5 см и 10 см. Найти периметр треугольника.

8. В прямоугольном треугольнике отношение произведения длин биссектрис внутренних острых углов к квадрату длины гипотенузы равно $\frac{1}{2}$. Найти острые углы треугольника.
9. Биссектриса прямоугольного треугольника делит катет на отрезки 10 и 6. Найти площадь треугольника.
10. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами $90°$ и $120°$. Найти расстояние между центрами окружностей, лежащими по одну сторону хорды, если длина хорды равна $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$.
11. Из точки A окружности проведены диаметр AB и хорда AC, которая продолжена за C на расстояние, равное AC. Найти BC, если $KB=10$, $\angle CAB=30°$.
12. К окружности по разные стороны от центра проведены параллельные хорды длиной 12 и 16. Расстояние между ними равно 14. Найти радиус окружности.
13. В окружность радиуса $R=3\sqrt{3}$ вписан квадрат. Из одной вершины этого квадрата проведены две хорды, стягивающие дуги по $120°$. Найти длину отрезка диагонали квадрата, заключенного между этими хордами.
14. В окружности хорда длиной 30 перпендикулярна диаметру и делит его в отношении 1:9. Найти диаметр окружности.
15. Расстояние от боковой стороны равнобедренного треугольника, равной 16, до центра описанной около него окружности равно 6. Найти радиус этой окружности.
16. В круговой сектор, дуга которого содержит $60°$, вписан круг. Найти отношение площади сектора к площади этого круга.
17. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15, а проекция другого катета на гипотенузу равна 16. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник.
18. Круг радиуса 6 лежит внутри полукруга радиуса 24 и касается середины диаметра этого полукруга. Найти радиус меньшей окружности, касающейся заданного круга, полукруга и диаметра полукруга.

14.5. Проверочный тест

1. Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 6. Медиана AK делит боковую сторону BC на части так, что

$$(AB+BK):(KC+CA)=5:2.$$

Тогда боковая сторона треугольника равна
1) 15 ; 2) 25 ; 3) 90 ; 4) 12 ; 5) 60.

2. Величина одного из углов треугольника равна $20°$. Тогда величина острого угла между биссектрисами двух других углов треугольника равна
1) $80°$; 2) $70°$; 3) $65°$; 4) $83°$; 5) $85°$.

3. Если величина угла при вершине равнобедренного треугольника равна $60°$, а длина боковой стороны равна 10, то длина средней линии этого треугольника равна
1) 10; 2) 8; 3) 5; 4) 12; 5) 6.

4. Если в треугольнике ABC длина медианы BD равна половине длины стороны AC, то угол B треугольника равен

1) 60°; 2) 30°; 3) 90°; 4) 45°; 5) 100°.

5. Если длины сторон треугольника ABC относятся как 4:5:6, а длина меньшей стороны подобного ему треугольника $A'B'C'$ равна 0,8, то сумма длин двух других сторон подобного треугольника $A'B'C'$ равна

1) $8,5$; 2) 3; 3) $2,2$; 4) $3,5$; 5) 4.

6. В круге через концы хорды, длина которой равна 30, проведены две касательные до пересечения в точке A. Тогда расстояние от точки A до хорды, если радиус окружности равен 17, равно

1) $\frac{215}{8}$; 2) 28; 3) $\frac{225}{8}$; 4) 29; 5) $\frac{235}{6}$.

7. В окружности радиуса $R=\sqrt{3}$ из одного конца диаметра проведена касательная, а из другого конца — хорда, стягивающая дугу в 120°. Хорда продолжена до пересечения с касательной. Тогда внешний отрезок секущей равен

1) $\sqrt{3}$; 2) 1; 3) $1,5$; 4) $2\sqrt{3}$; 5) $0,5$.

8. Сторона ромба равна 12, а острый угол его равен 30°. Найдите радиус вписанного круга.

9. В равнобокую трапецию, периметр которой равен 40, вписана окружность радиуса 3. Найти площадь трапеции.

10. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 5, а косинус угла при основании равен 0,6. Найти радиус вписанного круга.

14.6. Ответы

Аудиторные задачи:

1. 5; **2.** 30°; **3.** 3; **4.** 4 см; **5.** 40; **6.** 19; **7.** 24; **8.** 0,5; **9.** 7,5; **10.** 12,5; **11.** 3; **12.** 180; **13.** 7; **14.** 45°; **15.** 2,4; **16.** 37; **17.** 7,2; **18.** 0,1; **19.** 2; **20.** $\frac{31}{10}$; **21.** $\frac{2}{5}l^2$; **22.** 5; **23.** 20; **24.** 288; **25.** 4; **26.** 6; **27.** 4; **28.** 25; **29.** 12; **30.** 80; **31.** 12; **32.** 13; **33.** 11; **34.** 12; **35.** 95°; **36.** 8; **37.** 10; **38.** 8,5; **39.** 2,1; **40.** 84°; **41.** 48; **42.** 11,5; **43.** 60°; **44.** 2,2; **45.** 31,2; **46.** 2; **47.** 2 и $\sqrt{2}$; **48.** 8.

Домашнее задание:

1. 6,5; **2.** 3,75; **3.** 24; **4.** 5; **5.** 9; **6.** 5; **7.** 40 см; **8.** $\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{1+2\sqrt{2}}{4}$, $\frac{\pi}{4}\mp\arccos\frac{1+2\sqrt{2}}{4}$; **9.** 96; **10.** 0,25; **11.** 5; **12.** 10; **13.** 6; **14.** 50; **15.** 10; **16.** 1,5; **17.** 5; **18.** 8.

15. Планиметрия. Различные геометрические фигуры на плоскости

Параллелограмм, свойства и признаки параллелограмма. Прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция. Средняя линия трапеции. Свойство диагоналей в ромбе. Вписанные и описанные многоугольники. Свойство четырехугольника, вписанного в окружность. Свойство четырехугольника, описанного вокруг окружности. Окружность, вписанная в треугольник, ее центр и радиус. Площадь треугольника, *параллелограмма, ромба, прямоугольника, трапеции. Длина окружности, число π. Площадь круга, площадь сектора.*

15.1. Справочный материал

Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны называется *параллелограммом* (рис. 19).

Свойства параллелограмма:

1) противоположные стороны параллелограмма равны;

2) противоположные углы параллелограмма равны;

3) диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам;

4) сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон:

$$d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2); \tag{1}$$

5) площадь параллелограмма вычисляется по формуле

$$S=ab\sin\alpha=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\beta.$$

Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется *ромбом.*

Свойства ромба:

1) диагонали ромба взаимно перпендикулярны;

2) диагонали ромба являются биссектрисами его углов;

3) площадь ромба вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2.$$

Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется *прямоугольником.*

Площадь прямоугольника равна

$$S=ab.$$

Прямоугольник, у которого все стороны равны, называется *квадратом.*

Четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие непараллельны, называется *трапецией* (рис. 20).

Площадь трапеции вычисляется по формуле

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot h.$$

Средняя линия трапеции равна полусумме оснований.

Свойства вписанных и описанных четырехугольников:

1) четырехугольник можно вписать в круг тогда и только тогда, когда суммы противоположных углов равны 180°;

2) если четырехугольник описан около круга, то суммы его противоположных сторон равны между собой.

15.2. Примеры

Пример 1. Средняя линия равнобокой трапеции, описанной около круга, равна 68 см. Определить радиус этого круга, если нижнее основание трапеции больше верхнего на 64 см.

Решение. Если чертеж выполнен неаккуратно, то может показаться, что средняя линия трапеции является диаметром круга. Из рис. 23 видно, что это не так.

$$\frac{BC+AD}{2}=68 \text{ (по свойству средней линии трапеции).}$$

$$AD-BC=64 \text{ (по условию).}$$

Решая эту систему уравнений, получаем $AD=100$, $BC=36$. По свойству описанного четырехугольника $AB+CD=BC+AD$, так как $AB=CD$, то $AB=\dfrac{BC+AD}{2}$, или $AB=68$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник $ABE(BE\perp AD)$. Так как трапеция равнобокая, то $AE=\dfrac{AD-BC}{2}=32$. По теореме Пифагора для $\triangle ABE$ имеем $AB^2=AE^2+BE^2$. Отсюда $BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\sqrt{68^2-32^2}=60$. Зная, что $BE=2R$, имеем $R=30$.

Ответ: 30 см.

Пример 2. Сторона ромба равна 5, а одна из диагоналей равна 6. Найти вторую диагональ.

Решение. Так как ромб является и параллелограммом, то по формуле (1) получаем, что квадрат второй диагонали равен

$$d_2^2=4a^2-d_1^2=100-36=64.$$

Тогда $d_2=8$.

Ответ: Вторая диагональ равна 8.

Пример 3. В параллелограмме $ABCD$ известны: сторона AB равна a, сторона BC равна b и $\angle ABC=\alpha$. Найти площадь треугольника, образованного вершиной B и центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB.

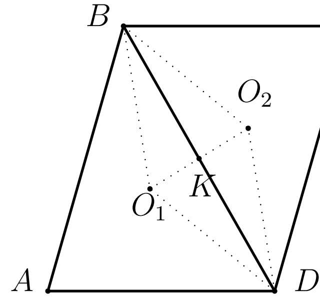

Рис. 27

Решение. Пусть O_1 — центр окружности, вписанной в треугольник DAB; O_2 — центр окружности, вписанной в треугольник BCD (рис. 27). Очевидно, что четырехугольник BO_2DO_1 является ромбом ($O_1B = O_1D$ как радиусы окружности, описанной вокруг треугольника DAB; $O_2B = O_2D$ как радиусы окружности, описанной вокруг треугольника BCD; треугольники DAB и BCD равны, поэтому радиусы описанных вокруг них окружностей также равны).

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны. Тогда

$$S_{BO_1O_2} = O_1K \cdot BK = \frac{BK^2}{\operatorname{tg} \angle BO_1K}.$$

Углы $\angle BO_1K$ и $\angle BAD$ равны, так как вписанный в окружность угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу, а

$$\angle BAD = 180^\circ - \alpha.$$

Таким образом,

$$S_{BO_1O_2} = \frac{BK^2}{\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)} = -\frac{BK^2}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{BD^2}{4 \operatorname{tg} \alpha}. \tag{2}$$

Осталось найти сторону BD. Ее находим из треугольника DAB по теореме косинусов:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos \angle BAD,$$
$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \alpha),$$
$$BD^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha.$$

Подставляя это выражение в (2), получаем

$$S_{BO_1O_2} = -\frac{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}{4 \operatorname{tg} \alpha}.$$

Ответ: площадь треугольника BO_1O_2 равна

$$-\frac{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}{4 \operatorname{tg} \alpha}.$$

15.3. Аудиторные задачи

1. Сторона ромба равна 17, а одна из диагоналей — 30. Найти длину второй диагонали.

2. Найти тупой угол ромба, если высота, проведенная из его вершины, делит противоположную сторону пополам.

3. В прямоугольнике $ABCD$ проведена диагональ AC. Известно, что угол ACB в восемь раз меньше угла CAB. Найти угол CAB.

4. Периметр прямоугольника равен 92. Одна из его сторон больше другой на 4. Найти большую сторону прямоугольника.

5. В параллелограмме сторона AB равна 6, диагонали равны 9 и 5. O — точка пересечения диагоналей. Чему равен периметр треугольника AOB?

6. Периметр параллелограмма равен 60. Найти площадь параллелограмма, если его стороны относятся как 2:3, а острый угол равен 30°.
7. Параллелограмм, периметр которого равен 44, разделен диагоналями на четыре треугольника. Разность между периметрами двух смежных треугольников равна 6, найти большую сторону параллелограмма.
8. Параллелограмм и прямоугольник имеют соответственно равные стороны. Площадь параллелограмма в два раза меньше площади прямоугольника. Найти тупой угол параллелограмма.
9. В параллелограмме $ABCD$ длина стороны AD равна 10, биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке P. Средняя линия трапеции $APCD$ равна 6, найти периметр параллелограмма.
10. Диагонали параллелограмма равны 6 и 8, а угол между ними равен 30°. Найти площадь параллелограмма.
11. В равнобедренной трапеции высота равна 14, основания равны 12 и 16. Найти площадь круга, описанного около трапеции.
12. Меньшее основание трапеции равно 4, большее основание больше средней линии на 4. Найти длину средней линии.
13. Периметр равнобедренной трапеции равен 36, а средняя линия равна 10. Найти боковую сторону трапеции.
14. Один из углов ромба равен 60°, диагональ, проведенная из вершины этого угла равна $4\sqrt{3}$. Найти периметр ромба.
15. Прямая CF параллельна боковой стороне трапеции и делит основание AD на отрезки $AF=9$ и $FD=5$. Найти длину средней линии.
16. Длина стороны ромба равна 10, диагонали относятся как 3:4. Найти площадь ромба.
17. В трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD продлены до пересечения в точке E. Известно, что $AB=1$, $CD=3$, $BE=2$. Найти EC.
18. Углы при основании трапеции равны 90° и 45°. Одно основание в два раза больше другого и равно 24. Найти меньшую боковую сторону трапеции.
19. В равнобедренной трапеции основания равны 6 и 10. Диагональ — 10. Найти площадь трапеции.
20. Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, $CE:AE=3:1$, площадь треугольника BCE равна 15, а площадь треугольника ADE вдвое больше площади треугольника ABE. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.
21. Периметр описанной около окружности трапеции равен 30. Найти ее среднюю линию.
22. В равнобедренную трапецию с верхним основанием 1 вписана окружность единичного радиуса. Найти нижнее основание трапеции.
23. Меньшая диагональ ромба равна $\sqrt[4]{3}$, а его площадь 1,5. Найти величину тупого угла ромба.
24. Сторона ромба равна 4. Радиус окружности, вписанной в этот ромб, равен 1. Найти величину острого угла ромба.
25. В окружность радиуса $R=3\sqrt{3}$ вписан квадрат. Из одной вершины этого квадрата проведены две хорды, стягивающие дуги по 120°. Найти длину отрезка диагонали квадрата, заключенного между этими хордами.

26. Периметр прямоугольника $ABCD$ равен 24. Точка O принадлежит прямоугольнику. Найти сумму расстояний от этой точки до всех сторон прямоугольника.
27. В параллелограмме $ABCD$ высота BE делит сторону AD в точке E пополам. Найти сторону AB, если периметр параллелограмма равен 7, а периметр треугольника ABD равен 5.
28. Диагонали параллелограмма равны 17 и 19. Одна сторона — 10. Найти другую сторону.
29. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, у которого отношение длины описанной окружности к стороне многоугольника равно 2π?
30. Центр правильного двенадцатиугольника — точка O — соединен с двумя соседними вершинами A и B. Найти расстояние от точки A до отрезка OB, если длина отрезка OB равна 20.
31. Около правильного многоугольника описана окружность, в него же вписана еще одна окружность. Площадь получившегося кольца равна 64π. Найти длину стороны многоугольника.
32. В правильный шестиугольник вписана окружность, которая в свою очередь описана около квадрата со стороной $\sqrt[4]{12}$. Найти площадь шестиугольника.
33. Найти расстояние между параллельными сторонами правильного шестиугольника, если радиус описанной около него окружности равен $10\sqrt{3}$.
34. В выпуклом пятиугольнике два внутренних угла прямые. Остальные относятся между собой как 2:3:4. Найти больший угол.
35. В трапеции, площадь которой равна 161, высота — 7, а разность параллельных сторон — 11, найти длину большего основания.
36. Найти высоту прямоугольной трапеции, у которой большая боковая сторона равна 5, а разность длин оснований равна 4.
37. Отрезок длины 5 соединяет боковые стороны трапеции и параллелен ее основаниям, равным 2 и 9. Найти отношение, в котором этот отрезок делит площадь трапеции.
38. Диагональ в прямоугольной трапеции, равная $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{8}$, делит трапецию на два равнобедренных треугольника. Найти периметр трапеции.
39. Равнобедренная трапеция описана около круга. Боковая сторона трапеции делится точкой касания на отрезки длиной 12 и 48. Найти площадь трапеции.
40. Средняя линия равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна 68. Найти радиус этого круга, если нижнее основание трапеции больше верхнего на 64.
41. Найти площадь трапеции по разности оснований, равной 14, и двум не параллельным сторонам, равным 13 и 15, если известно, что в трапецию можно вписать окружность.
42. В равнобедренной трапеции диагональ делит острый угол пополам. Найти среднюю линию трапеции, если ее периметр равен 48, а большее основание — 18.
43. В равнобедренной трапеции одно из оснований в два раза больше каждой из остальных сторон. Найти площадь трапеции, если ее высота равна $5\sqrt[4]{3}$.
44. Один из углов трапеции равен 30°. Боковые стороны при продолжении пересекаются под прямым углом. Найти меньшую боковую сторону трапеции, если ее средняя линия равна 10, а меньшее основание равно 8.

45. Площадь ромба равна 20, а радиус вписанной окружности равен 2. Найти сумму диагоналей ромба.

15.4. Домашнее задание

1. В трапеции $ABCD$ BC и AD — основания, O — точка пересечения диагоналей, $AD=18$, $AO=10$ и $OC=5$. Найти BC.
2. Диагональ равнобедренной трапеции делит ее тупой угол пополам. Меньшее основание равно 3, периметр равен 42. Найти площадь трапеции.
3. Найти боковую сторону равнобедренной трапеции, описанной около круга, если острый угол при основании трапеции равен $\frac{\pi}{6}$, а площадь трапеции — 288.
4. Около окружности описана трапеция, площадь которой равна 20, а синусы углов при основании равны 0,8. Найти длину средней линии трапеции.
5. В равнобедренной трапеции острый угол равен 30°, радиус вписанной в трапецию окружности равен 2. Найти длину средней линии трапеции.
6. В прямоугольной трапеции боковая сторона равна основанию и составляет с ним угол 120°. Найти площадь трапеции, если ее меньшее основание равно $2\sqrt[4]{3}$.
7. Найти радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник, меньшая диагональ которого равна 22.
8. В равнобедренной трапеции боковая сторона равна средней линии, периметр трапеции равен 48. Найти длину боковой стороны.
9. В окружность вписаны правильные шестиугольник и треугольник. Найти отношение площади шестиугольника к площади треугольника.
10. Найти длину окружности, вписанной в равнобедренную трапецию с основаниями 8 и 2.
11. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, у которого отношение длины описанной окружности к стороне многоугольника равно $\pi\sqrt{2}$?
12. В параллелограмме $ABCD$ проведена высота BK. Известно, что $\angle ABK=30°$, $AK=5$, $KD=8$. Найти углы и стороны параллелограмма.
13. В параллелограмме боковая сторона равна 8 и острый угол при основании — 30°. Найти проекцию высоты, опущенной на основание, на боковую сторону.
14. Диагональ ромба равна $45\sqrt{\frac{7}{2}}$, косинус противолежащего ей угла равен $-\frac{2}{7}$. Найти сторону ромба.
15. Одна из диагоналей параллелограмма, равная $\frac{9\sqrt{6}}{2}$, составляет с основанием угол 60°. Найти длину второй диагонали, если она составляет с тем же основанием угол 45°.
16. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD пересекаются в точке H. Площадь треугольника CDH равна 12, $AB:CD=1:2$. Найти площадь трапеции.
17. Сумма острых углов трапеции — 90°, высота равна 2, а основания — 12 и 16. Найти боковые стороны трапеции.
18. Отрезок длины 7 соединяет боковые стороны трапеции и параллелен ее основаниям, равным 3 и 9. Найти отношение, в котором этот отрезок делит площадь трапеции.

19. Дан параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB=2$, $BC=3$. Найти площадь этого параллелограмма, если известно, что диагональ AC перпендикулярна отрезку BE, соединяющему вершину B с серединой E стороны AD.

15.5. Проверочный тест

1. Средняя линия трапеции имеет длину 12 и делится диагональю на два отрезка, разность длин которых равна 3. Тогда длина большего основания трапеции равна
1) 15; 2) 16; 3) 18; 4) 17; 5) 20.

2. Если в равнобедренную трапецию, периметр которой равен 40, вписана окружность радиуса 3, то площадь трапеции равна
1) 120; 2) 60; 3) 100; 4) 40; 5) 80.

3. Если длина диагонали ромба, лежащей против угла 60°, равна 11,2, то периметр ромба равен
1) $22,4$; 2) $44,8$; 3) 30; 4) 40; 5) $20,6$.

4. Если внутренние углы четырехугольника относятся как 2:2,5:9,5:10, то меньший угол четырехугольника равен
1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 15°; 5) 20°.

5. Длина диагонали равнобедренной трапеции равна 12, длина боковой стороны равна 4, синус угла при основании равен 0,9. Тогда $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, где α — острый угол между диагоналями трапеции, равен
1) 1; 2) $0,5$; 3) $0,3$; 4) $0,4$; 5) $\sqrt{3}/2$.

6. Если диагональ равнобедренной трапеции, равная 5, образует с основанием угол, синус которого равен $0,6$, то площадь трапеции равна
1) 9; 2) 16; 3) 10; 4) 8; 5) 12.

7. Окружность, вписанная в ромб $ABCD$ касается стороны AB в точке M, причем $AM:MB=2:3$. Если площадь ромба равна $60\sqrt{6}$, то радиус окружности равен
1) 6; 2) 3; 3) 4; 4) 5; 5) 2.

8. В трапеции $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла A. Биссектриса угла B пересекает большее основание AD в точке E. Найдите высоту трапеции, если $AC=8\sqrt{5}$, $BE=4\sqrt{5}$.

9. Сторона правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна $32\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MPK, если точки M, P и K — середины сторон AB, CD, EF соответственно.

10. Равнобедренная трапеция описана около окружности радиуса 4. Найдите тангенс угла при большем основании трапеции, если ее средняя линия равна $4\sqrt{5}$.

15.6. Ответы

Аудиторные задачи:

1. 16; **2.** 120°; **3.** 80°; **4.** 25; **5.** 13; **6.** 108; **7.** 14; **8.** 150°; **9.** 36; **10.** 12; **11.** 100π; **12.** 8; **13.** 8; **14.** 16; **15.** 11,5; **16.** 96; **17.** 6; **18.** 12; **19.** 48; **20.** 60; **21.** 7,5; **22.** 4; **23.** 120°;

24. 60°; **25.** 6; **26.** 12; **27.** 1,5; **28.** 15; **29.** 6; **30.** 10; **31.** 16; **32.** 4,5; **33.** 30; **34.** 160°; **35.** 28,5; **36.** 3; **37.** $\frac{3}{8}$; **38.** 0,875; **39.** 2880; **40.** 30; **41.** 168; **42.** 14; **43.** 75; **44.** 2; **45.** $6\sqrt{5}$.

Домашнее задание:

1. 9; **2.** 96; **3.** 24; **4.** 5; **5.** 8; **6.** 7,5; **7.** 11; **8.** 12; **9.** 2; **10.** 4π; **11.** 4; **12.** 60°, 120°, 10, 13; **13.** 2; **14.** 52,5; **15.** 13,5; **16.** 27; **17.** $2\sqrt{2}$; **18.** $\frac{5}{4}$; **19.** $\sqrt{35}$.

16. Векторы на плоскости и в пространстве

Векторы на плоскости и в пространстве, линейные операции над векторами: сложение, вычитание, умножение на число. Метод координат на плоскости и в пространстве. Расстояние между точками на плоскости и в пространстве. Линейные операции над векторами в координатной форме. Длина вектора. Скалярное произведение векторов, его свойства. Угол между векторами. Условия перпендикулярности и коллинеарности векторов.

16.1. Справочный материал

Прямоугольная декартова система координат на плоскости

Расстояние между точками плоскости A и B, имеющими координаты соответственно $(x_1;\, y_1)$ и $(x_2;\, y_2)$, определяется по формуле

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{1}$$

По этой же формуле определяется длина отрезка AB или модуль вектора $\overrightarrow{AB}$.

Координаты $(x_{\text{ср}};\, y_{\text{ср}})$ середины отрезка AB определяют по формулам

$$x_{\text{ср}}=\frac{x_1+x_2}{2}; \quad y_{\text{ср}}=\frac{y_1+y_2}{2}. \tag{2}$$

Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ $(x;\, y)$ находят по формулам

$$x=x_2-x_1;\ y=y_2-y_1. \tag{3}$$

Прямоугольная декартова система координат в пространстве

Расстояние между точками пространства $A\,(x_1;\, y_1;\, z_1)$ и $B\,(x_2;\, y_2;\, z_2)$ определяют по формуле

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{4}$$

По этой же формуле определяют длину отрезка AB или модуль вектора $\overrightarrow{AB}$.

Координаты $(x_{\text{ср}};\, y_{\text{ср}};\, z_{\text{ср}})$ середины отрезка определяют по формулам

$$x_{\text{ср}}=\frac{x_1+x_2}{2};\ y_{\text{ср}}=\frac{y_1+y_2}{2};\ z_{\text{ср}}=\frac{z_1+z_2}{2}. \tag{5}$$

Координаты вектора $\overrightarrow{AB}\,(x;\ y;\ z)$ находят по формулам

$$x=x_2-x_1;\ \ y=y_2-y_1;\ \ z=z_2-z_1. \tag{6}$$

Тот факт, что вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $(x;\ y;\ z)$, может быть записан так:

$$\overrightarrow{AB}=x\cdot\overrightarrow{i}+y\cdot\overrightarrow{j}+z\cdot\overrightarrow{k},$$

где $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ — единичные векторы, направленные вдоль осей Ox, Oy, Oz соответственно.

Если вектор $\overrightarrow{a}$ задан своими координатами a_1, a_2, a_3, то его длину находят по формуле

$$|a|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}. \tag{7}$$

Пусть два вектора $\overrightarrow{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $\overrightarrow{b}\,(b_1;\ b_2;\ b_3)$, тогда

$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{c}\,(a_1+b_1;\ a_2+b_2;\ a_3+b_3); \tag{8}$$

$$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=\overrightarrow{d}\,(a_1-b_1;\ a_2-b_2;\ a_3-b_3); \tag{9}$$

$$\lambda\overrightarrow{a}=\overrightarrow{k}\,(\lambda a_1;\ \lambda a_2;\ \lambda a_3). \tag{10}$$

Скалярным произведением $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ называется число

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cos\varphi, \tag{11}$$

где φ — угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами, выражается формулой

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3. \tag{12}$$

Косинус угла между векторами $\overrightarrow{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $\overrightarrow{b}\,(b_1;\ b_2;\ b_3)$ определяют по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \tag{13}$$

Необходимое и достаточное *условие перпендикулярности* векторов $\overrightarrow{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $\overrightarrow{b}\,(b_1;\ b_2;\ b_3)$ имеет вид

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0. \tag{14}$$

Необходимым и достаточным *условием параллельности* (коллинеарности) ненулевых векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ является существование такого числа λ, что

$$\overrightarrow{a}=\lambda\overrightarrow{b}. \tag{15}$$

16.2. Примеры

Пример 1. При каком значении z векторы $\overrightarrow{a}\,(6;\ 0;\ 12)$ и $\overrightarrow{b}\,(-8;\ 13;\ z)$ перпендикулярны?

Решение. Воспользуемся формулой (14)

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=6\cdot(-8)+0\cdot 13+12\cdot z=0,\quad 12z-48=0,\quad z=4.$$

Ответ: $z=4$.

Пример 2. Найти скалярное произведение векторов

$$\overrightarrow{a}=2\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}-4\overrightarrow{k}\quad\text{и}\quad\overrightarrow{b}=\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}.$$

Решение. Запишем векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ в координатной форме:

$$\overrightarrow{a}\,(2;\ 3;\ -4),\quad \overrightarrow{b}\,(1;\ -2;\ 1).$$

Используя формулу (12), имеем

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=2\cdot 1+3\cdot(-2)+(-4)\cdot 1=-8.$$

Ответ: -8.

Пример 3. При каком значении α векторы $\overrightarrow{a}\,(2;\ 3;\ -4)$ и $\overrightarrow{b}\,(\alpha;\ -6;\ 8)$ параллельны?

Решение. Используя формулу (15), имеем $\overrightarrow{a}=\lambda\overrightarrow{b}$.
Отсюда

$$\begin{cases} 2=\lambda\alpha,\\ 3=-6\lambda,\\ -4=8\lambda.\end{cases}$$

Решая систему, получим $\lambda=-\dfrac{1}{2}$; $\alpha=-4$.

Ответ: $\alpha=-4$.

Пример 4. Найти угол между векторами $\overrightarrow{a}\,(-1;\ 2;\ -2)$ и $\overrightarrow{b}\,(6;\ 3;\ -6)$.

Решение. Используя формулу (13), имеем

$$\cos\varphi=\frac{(-1)\cdot 6+2\cdot 3+(-2)\cdot(-6)}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{6^2+3^2+(-6)^2}}=\frac{12}{3\cdot 9}=\frac{4}{9}.$$

Ответ: $\varphi=\arccos\dfrac{4}{9}$.

Пример 5. Векторы $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{i}+4\overrightarrow{k}$ и $\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}+4\overrightarrow{k}$ служат сторонами треугольника ABC. Найти длину медианы AM.

Решение. $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(-3+5;\ 0-2;\ 4+4)=(1;\ -1;\ 4),$$

$$|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}.$$

Ответ: $|\overrightarrow{AM}|=3\sqrt{2}$.

Пример 6. Даны два вектора $\vec{a}(5,2)$ и $\vec{b}(7,-3)$. Найти вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условиям $\vec{a}\cdot\vec{c}=38$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=30$.

Решение. Пусть $\vec{c}(x,y)$, тогда по формуле скалярного произведения и из условия задачи имеем

$$5x+2y=38, \quad 7x-3y=30.$$

Решая эту систему относительно x и y, получаем $x=6$, $y=4$.

Ответ: $\vec{c}(6,4)$.

16.3. Аудиторные задачи

1. При каких значениях x и y векторы $\vec{a}(3,-2,x)$ и $\vec{b}(y,4,2)$ коллинеарны? В ответе записать произведение найденных x и y.

2. При каком значении x векторы $\vec{a}(x,3,4)$ и $\vec{b}(5,6,3)$ перпендикулярны?

3. Найти произведение координат x и z вектора $\vec{a}(x,2,z)$, перпендикулярного вектору $\vec{b}(2,3,-2)$ и оси Ox.

4. Укажите градусную меру угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если

a) $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$;

b) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$;

c) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$;

d) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$;

e) $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

5. Найти длину вектора $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, где $\vec{a}(1,2,3)$, $\vec{b}(4,-2,9)$.

6. При каких значениях z длина вектора $\vec{c}=2\vec{i}-9\vec{j}+z\vec{k}$ равна 11. В ответе записать произведение всех найденных значений z.

7. Найти $|\vec{a}|$, если $|\vec{b}|=7$, $|\vec{a}+\vec{b}|=12$, $|\vec{a}-\vec{b}|=14$.

8. Даны векторы $\vec{a}(6,2,1)$ и $\vec{b}(0,-1,2)$. Найти длину вектора $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$.

9. Найти $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, если $\vec{a}+\vec{b}$ делит угол между векторами $\vec{a}(3;5;-7)$ и $\vec{b}$ пополам.

10. Найти угол между векторами $\vec{a}=2\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$.

11. Найти градусную меру угла между вектором $\vec{a}(-\sqrt{2};\sqrt{5}/2;\sqrt{3}/2)$ и осью абсцисс.

12. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если угол между ними 45° и $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$.

13. Найти наибольший угол треугольника с вершинами в точках $A(1,2)$, $B(1,4)$, $C(3,2)$.

14. Найти угол при основании равнобедренного треугольника с вершинами в точках $A(2,3,0)$, $B(3,2,1)$, $C(3,4,1)$.

15. В трапеции $ABCD$ стороны BC и AD — основания, M и N — середины сторон AB и CD, векторы $\overrightarrow{AB}(-7;4;5)$, $\overrightarrow{AC}(-3;2;-1)$, $\overrightarrow{AD}(6;-3;-9)$. Найти сумму координат вектора $\overrightarrow{MN}$.

16. В треугольнике ABC с вершинами в точках $A(4,5,1)$, $B(2,3,0)$, $C(2,1,-1)$ найти длину медианы BD.

17. При каких значениях параметра m длина вектора $\vec{a}(m+3,m,2)$ не превосходит 3.

18. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$, если $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}(2,-1,3)$, $\vec{b}(1,1,-1)$.

19. Зная, что $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$ и угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\dfrac{2\pi}{3}$, найти, при каком значении α векторы $\vec{p}=\alpha\vec{a}+17\vec{b}$ и $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярны.

20. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол в $120°$ и $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$. Найти $|\vec{a}-\vec{b}|$.

21. Найти угол между векторами $2\vec{a}$ и $\dfrac{\vec{b}}{2}$, если $\vec{a}(-4,2,4)$ и $\vec{b}(2,-2,0)$.

22. Найти координату x точки M, лежащей на оси Ox и одинаково удаленной от точек $A(1,2,3)$ и $B(-3,3,2)$.

23. Длины ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны. Найти угол между этими векторами, если известно, что векторы $\vec{p}=\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{q}=5\vec{a}-4\vec{b}$ перпендикулярны.

24. Дан треугольник с вершинами в точках $A(3,-2,1)$, $B(3,0,2)$, $C(1,2,5)$. Найти угол, образованный медианой BD и основанием AC.

25. Найти площадь четырехугольника, вершины которого расположены в точках $A(0,0)$, $B(-1,3)$, $C(2,4)$, $D(3,1)$.

26. Найти квадрат расстояния от начала системы координат до центра окружности, описанной вокруг треугольника ABC, координаты вершин которого $A(1,0,1)$, $B(1,1,0)$, $C(1,1,1)$.

27. В треугольнике ABC медианы пересекаются в точке O. Найти сумму векторов $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

28. Точки $A(1,0,2)$, $B(2,1,0)$, $C(1,2,0)$ являются последовательными вершинами параллелограмма. Найти сумму координат четвертой вершины.

29. Векторы $\overrightarrow{AB}=-3\vec{i}+4\vec{k}$ и $\overrightarrow{AC}=5\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$ служат сторонами треугольника ABC. Найти длину медианы AM.

30. Найти угол между диагоналями четырехугольника с вершинами в точках $A(3,3)$, $B(2,6)$, $C(1,5)$, $D(6,2)$.

31. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы вектор $\vec{a}+\vec{b}$ делил пополам угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

32. Найти координаты вектора $\vec{p}$, коллинеарного вектору $\vec{q}(3,-4)$, если известно, что вектор $\vec{p}$ образует тупой угол с осью Ox и $|\vec{p}|=10$.

33. Найти вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}(2,1,-1)$ и удовлетворяющий условию $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$.

34. Грани параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — ромбы со стороной $3\sqrt{2}$. Плоские углы при вершине A равны $60°$, $120°$, $120°$. Найти длину диагонали AC_1.

35. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ таковы, что $\vec{a}=2\vec{b}+3\vec{c}$. Чему равно скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{c}=3$ и $|\vec{a}|=2$?

36. При каких значениях x и y точки $A(2,0)$, $B(0,2)$, $C(0,7)$ и $D(x,y)$ являются последовательными вершинами равнобедренной трапеции $ABCD$?

37. Векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ таковы, что $\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=0$. Зная, что $|\vec{x}|=13$, $|\vec{y}|=14$, $|\vec{z}|=15$, найти $\vec{x}\cdot\vec{y}+\vec{x}\cdot\vec{z}+\vec{y}\cdot\vec{z}$.

38. Даны два вектора $\vec{a}(5,2)$, $\vec{b}(7,-3)$. Найти вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условиям $\vec{a}\cdot\vec{c}=38$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=30$.
39. Из одной точки проведены векторы $\vec{a}(-12,16)$, $\vec{b}(12,5)$. Найти координаты вектора, который будучи отложен от той же точки, делит пополам угол между векторами.
40. Даны векторы $\vec{a}(1,1,-1)$, $\vec{b}(5,-3,-3)$, $\vec{c}(3,-1,2)$. Найти векторы, коллинеарные вектору $\vec{c}$, длины которых равны длине вектора $\vec{a}+\vec{b}$.
41. Вычислить косинус угла между векторами $\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{a}+\vec{b}$, если $\vec{a}(1,2,1)$, $\vec{b}(2,-1,0)$.
42. Углы между векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ равны. Равны также их длины. Найти координаты вектора $\vec{c}$, если $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{j}+\vec{k}$.
43. Вычислить координаты единичного вектора, если известно, что он перпендикулярен векторам $\vec{a}(1,1,0)$ и $\vec{b}(0,1,1)$.
44. В параллелограмме $ABCD$ известны координаты трех вершин: $A(3,1,2)$, $B(0,-1,-1)$, $C(-1,1,0)$. Найти длину диагонали BD.
45. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC=8$) точка E делит боковую сторону AB в отношении 3:1 (считая от вершины B). Вычислить угол между векторами $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{CA}$, если $CA=12$.
46. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра AB, AD, AA_1 равны соответственно 1, 2, 3. Найти косинус угла между диагоналями AC_1 и BD.

16.4. Домашнее задание

1. При каком значении α векторы $\vec{a}(2,3,-4)$ и $\vec{a}(\alpha,-6,8)$ параллельны?
2. Найти произведение координат x, y, z вектора $\vec{c}(x,y,z)$, если $\vec{p}\cdot\vec{a}=6$, $\vec{p}\cdot\vec{b}=9$, $\vec{p}\cdot\vec{c}=4$, $\vec{a}(1,1,0)$, $\vec{b}(1,-2,3)$, $\vec{c}(1,-1,0)$.
3. Найти значение выражения $yz-x^2$, где x, y, z — координаты вектора $\vec{c}(x,y,z)$, зная, что $|\vec{c}|=\sqrt{30}$. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}(2,2,-1)$, $\vec{b}(3,-1,1)$ и образует тупой угол с осью Oz.
4. Найти $|\vec{a}-\vec{b}|$, если $|\vec{a}+\vec{b}|=31$, $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=21$.
5. Найти значение выражения $A=S\cdot x\cdot y$, где S — площадь треугольника ABC, координаты вершин которого $A(1,2)$, $B(1,4)$, $C(3,2)$, а x, y — координаты центра описанной вокруг треугольника окружности.
6. Найти $|\vec{a}|:|\vec{b}|$, если $\vec{a}+\vec{b}$ делит угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}(33;-22;11)$ пополам.
7. Дан треугольник с вершинами в точках $A(0,0)$, $B(2,4)$, $C(1,3)$. Найти квадрат длины высоты BD треугольника ABC.
8. Найти градусную меру угла между вектором $\vec{a}(-\sqrt{6};-3\sqrt{2};-2\sqrt{3})$ и осью ординат.
9. Найти диагональ AC параллелограмма $ABCD$, у которого $AB=7$, $AD=8$, $\angle BAD=60^\circ$.
10. В параллелограмме $ABCD$ заданы $\overrightarrow{AB}(-5;-1;2)$, $\overrightarrow{CB}(-3;-3;4)$, $A(2;8;-2)$. Найти сумму координат точки пересечения диагоналей параллелограмма.
11. Найти вектор $\vec{c}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a}(2,3,-1)$, $\vec{b}(1,-2,3)$ и удовлетворяет условию $\vec{c}\cdot(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=-6$.
12. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ с ребрами $AA'=6$, $AB=8$ и $AD=5$ найти косинус угла $B'AD'$.

13. Векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ таковы, что $\vec{x}=3\vec{y}+7\vec{z}$, $|\vec{x}|=2$, $\vec{x}\cdot\vec{y}=1$. Определить $\vec{x}\cdot\vec{z}$.

14. При каких p и t векторы $\vec{b}(p,-14,7)$, $\vec{c}(10,t,2)$ коллинеарны?

15. Известно, что векторы $3\vec{a}-5\vec{b}$ и $2\vec{a}+\vec{b}$ перпендикулярны между собой, а векторы $\vec{a}+4\vec{b}$ и $-\vec{a}+\vec{b}$ также взаимно перпендикулярны. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

16. Зная, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=4$ и $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$, вычислить $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$.

17. Объем прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен 3. Определить координаты вершины A_1, если координаты одного из оснований призмы известны: $A(1,0,1)$, $B(2,0,0)$, $C(0,1,0)$.

18. Доказать, что треугольник ABC с вершинами в точках $A(1,0,1)$, $B(1,1,0)$, $C(1,1,1)$ — прямоугольный. Найти расстояние от начала координат до центра окружности, описанного около этого треугольника.

19. Даны вершины треугольника $A(1,-1,-3)$, $B(2,1,-2)$, $C(-5,2,-6)$. Вычислить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине A.

16.5. Проверочный тест

1. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 1. Тогда диагональ AC_1 параллелепипеда при условии, что плоские углы при вершине A равны 60°, имеет величину

1) $\sqrt{7}$; 2) $\sqrt{6}$; 3) 2; 4) $2\sqrt{6}$; 5) 3, 5.

2. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}(2,2,-1)$ и $\vec{b}(3,-1,1)$; образует с осью Oz тупой угол. Тогда значение выражения $yz-x^2$, где x,y,z — координаты вектора $\vec{c}(x,y,z)$, и $|\vec{c}|=\sqrt{30}$, равно

1) -11; 2) -13; 3) 11; 4) 13; 5) 15.

3. Векторы $\vec{a}(6,0,12)$ и $\vec{b}(-8,13,z)$ перпендикулярны при значении z равном

1) -1; 2) -3; 3) 4; 4) -4; 5) 0.

4. Длина вектора $\vec{a}(\sqrt{3},m+1,m+2)$ не превосходит 8 при значениях m, удовлетворяющих условию

1) $-7<m<4$; 2) $-6\leqslant m\leqslant 5$; 3) $-6<m<5$; 4) $-7\leqslant m\leqslant 4$; 5) $-8\leqslant m\leqslant 5$.

5. Точка, симметричная точке $B(3,-2,-3)$ относительно начала координат, имеет координаты

1) $(-3,2,3)$; 2) $(-3,-2,-3)$; 3) $(3,2,3)$; 4) $(3,2,-3)$; 5) $(3,-2,3)$.

6. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ таковы, что $\vec{b}=3\vec{a}-\vec{c}$. Если скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}=6$ и $|\vec{a}|=2$, то скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{c}$ равно

1) -6; 2) -12; 3) 6; 4) 12; 5) 0.

7. Площадь параллелогамма $ABCD$ с вершинами $A(1,2)$, $B(4,6)$, $D(5,5)$ равна

1) 5; 2) 6; 3) 4; 4) 7; 5) 8.

8. Векторы $\vec{a}=(-6,-4,p)$ и $\vec{b}=(t,2,1)$ коллинеарны. Найдите сумму $p+t$.

9. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}=(1,-2,2)$ и $\vec{b}=(-2,1,2)$.

10. Найдите длину медианы AM треугольника ABC с вершинами $A(1,1,1)$, $B(3,4,4)$, $C(7,6,2)$.

16.6. Ответы

Аудиторные задачи:

1. 6; **2.** -6; **3.** 0; **4.** a), b) 180°, c) 90°, d), e) 0°; **5.** 13; **6.** -36; **7.** $|\vec{a}|=11$; **8.** 13; **9.** 83; **10.** 90°; **11.** 135°; **12.** 2; **13.** 90°; **14.** $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; **15.** -5; **16.** 1; **17.** $m\in[-2,-1]$; **18.** $\arccos\dfrac{12}{\sqrt{182}}$; **19.** $\alpha=40$; **20.** 7; **21.** 135°; **22.** $x=-1$; **23.** 60°; **24.** 45°; **25.** 10; **26.** 1,5; **27.** 0; **28.** 3; **29.** $3\sqrt{2}$; **30.** $\arccos\dfrac{7}{\sqrt{85}}$; **31.** $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, либо $|\vec{a}|=0$, либо $|\vec{b}|=0$; **32.** $\vec{p}(-6,8)$; **33.** $\vec{b}(1,1/2,-1/2)$; **34.** 6; **35.** $-5/2$; **36.** $x=7$, $y=0$; $x=2$, $y=9$; **37.** -295; **38.** $\vec{c}(6,4)$; **39.** $(21k,77k)$ *Указание:* найти единичные векторы и взять их сумму; **40.** $(6,-2,4)$ и $(-6,2,-4)$; **41.** $\dfrac{1}{11}$; **42.** $\vec{c}(1,0,1)$ и $\vec{c}(-1/3,4/3,-1/3)$. *Указание:* составить систему уравнений и равенства скалярных произведений и длин векторов; **43.** $\pm(1,-1,1)/\sqrt{3}$; **44.** 6; **45.** $\arccos\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$; **46.** $\dfrac{3}{\sqrt{70}}$.

Домашнее задание:

1. $\alpha=-4$; **2.** 10; **3.** 13; **4.** $|\vec{a}-\vec{b}|=11$; **5.** 12; **6.** 1; **7.** 0,4; **8.** 135^circ; **9.** 13; **10.** 7; **11.** $\vec{c}(-3,3,3)$; **12.** $\dfrac{18}{5\sqrt{61}}$; **13.** $\dfrac{1}{7}$; **14.** $p=35$, $t=-4$; **15.** $\arccos\pm\dfrac{19}{5\sqrt{43}}$; **16.** -13; **17.** $A_1(0,-2,0)$ и $A_1(2,2,2)$. *Указание:* зная объем, найти высоту и приравнять ее к длине вектора $\overrightarrow{AA_1}$, еще одно условие получить из перпендикулярности этого вектора векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; **18.** $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$; **19.** $\dfrac{3}{4}\sqrt{5}$.

17. Стереометрия

Прямые и плоскости в пространстве. Взаимное расположение двух прямых, двух плоскостей, прямой и плоскости в пространстве. Угол и расстояние между скрещивающимися прямыми. Признаки параллельности прямой и плоскости, двух плоскостей. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Теорема о трех перпендикулярах. Угол между прямой и плоскостью. Признак перпендикулярности двух плоскостей. Многогранники. Призма, виды призм: прямая и правильная призмы, параллелепипед, прямоугольный параллелепипед. Пирамида. Площадь поверхности и объем призмы, параллелепипеда и пирамиды. Тела вращения (цилиндр, конус и шар). Площадь поверхности и объем цилиндра, конуса, усеченного конуса. Сфера, шаровой сектор, шаровой сегмент. Площадь поверхности сферы, объем шара.

17.1. Справочный материал

Перечислим ряд теорем, часто используемых при решении задач.

1. Если плоскость содержит прямую, параллельную другой плоскости и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

2. Если через каждую из двух параллельных прямых проведена произвольная

плоскость, и эти плоскости пересекаются, то линия их пересечения параллельна каждой из данных прямых.

3. Если две пересекающиеся плоскости параллельны данной прямой, то линия их пересечения также параллельна данной прямой.

4. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

5. Если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, то линии их пересечения параллельны.

6. Если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то она перпендикулярна самой плоскости.

7. Две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны.

8. Если плоскость содержит перпендикуляр к другой плоскости, то эти плоскости взаимно перпендикулярны.

9. Для того, чтобы прямая, лежащая в плоскости, была перпендикулярна наклонной, необходимо и достаточно, чтобы она была перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость (*теорема о трех перпендикулярах*).

Две прямые в пространстве называются *скрещивающимися*, если они не пересекаются и не параллельны.

Для того чтобы найти угол между скрещивающимися прямыми, нужно одну из прямых переместить параллельно самой себе так, чтобы полученная прямая пересеклась со второй прямой. Тогда угол между ними есть угол между скрещивающимися прямыми.

Для того чтобы найти расстояние между скрещивающимися прямыми, нужно эти прямые поместить в две параллельные плоскости. Тогда длина перпендикуляра между этими плоскостями будет равна расстоянию между скрещивающимися прямыми.

Прямоугольный параллелепипед (рис. 28).

$$V = a \cdot b \cdot c \cdot; \quad S_{\text{бок.пов.}} = Pc,$$

где P — периметр прямоугольника, лежащего в основании.

Призма (рис. 29).

$$V = S_{\text{осн}} H; \quad S_{\text{бок.пов.}} = P_{\text{сеч.}} L,$$

где L – длина бокового ребра; $P_{\text{сеч.}}$ – периметр сечения, перпендикулярного боковому ребру.

Пирамида (рис. 30).

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} H.$$

Усеченная пирамида $V = \frac{1}{3} h(S + s + \sqrt{S \cdot s})$, где h — высота усеченной пирамиды; S и s — площади большего и меньшего оснований усеченной пирамиды.

Цилиндр (рис. 31).

$$V = HS_{\text{осн.}} = \pi R^2 H; \quad S_{\text{бок.пов.}} = 2\pi RH;$$

$$S_{\text{полн.пов.}} = 2\pi RH + 2\pi R^2;$$

Конус (рис. 32).

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} H = \frac{1}{3} \pi R^2 H; \quad S_{\text{бок.пов.}} = \pi R L,$$

где L — длина образующей конуса;

$$S_{\text{полн.пов.}} = \pi R L + \pi R^2.$$

Шар (рис. 33).

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Сфера

$$S = 4\pi R^2.$$

Шаровой сегмент

$$V = \pi R^2 \left(R - \frac{1}{3} h \right),$$

где h — высота сегмента;

$$S = 2\pi R h.$$

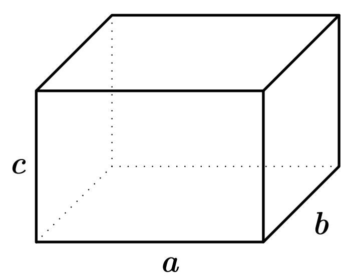

Рис. 28

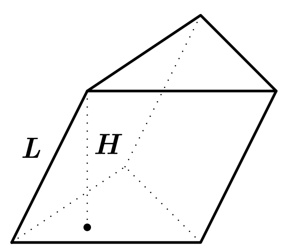

Рис. 29

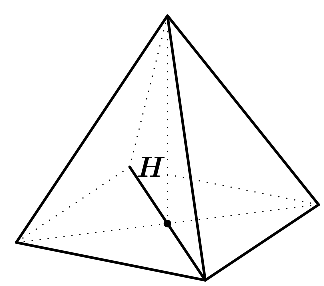

Рис. 30

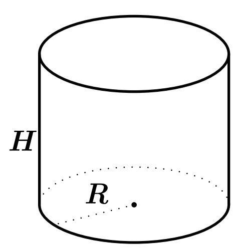

Рис. 31

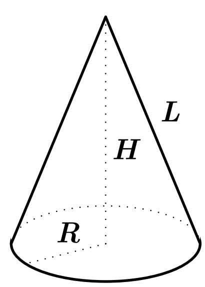

Рис. 32

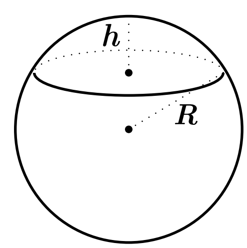

Рис. 33

17.2. Примеры

Пример 1. В треугольнике ABC, являющемся основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, угол $\angle ACB = 90°$, отношение гипотенузы к катету равно 1,5, а второй катет равен 18. Найти расстояние между прямыми CC_1 и B_1A.

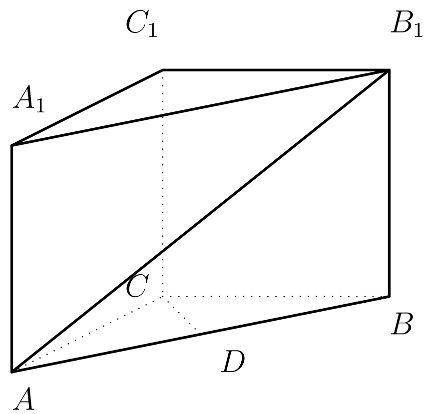

Рис. 34

Решение. Рассмотрим прямую призму $ABCA_1B_1C_1$ на рис. 34. Проведем прямую AB_1. Прямые CC_1 и AB_1 — скрещивающиеся. Для того, чтобы найти расстояние между скрещивающимися прямыми, нужно найти плоскость, в которой лежит прямая AB_1, параллельная прямой CC_1. Очевидно, это плоскость ABB_1A_1 (так как наша фигура — призма, то боковые ребра в ней параллельны, т. е. $CC_1 \| AA_1$ и, следовательно, $CC_1 \| ABB_1A_1$).

Затем нужно провести перпендикуляр между прямой CC_1 и плоскостью ABB_1A_1. Проведем в треугольнике ABC высоту CD. Покажем, что это нужный нам перпендикуляр. Действительно, по построению $CD \perp AB$. Далее, прямая AA_1 перпендикулярна плоскости ABC, так как призма прямая. Поэтому AA_1 перпендикулярна любой прямой на этой плоскости. В частности, $AA_1 \perp CD$. Следовательно, прямая CD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AB и AA_1 на плоскости ABB_1A_1, поэтому она перпендикулярна самой плоскости ABB_1A_1. Так что CD — требуемый перпендикуляр между прямой CC_1 и плоскостью ABB_1A_1. Тогда его длина и есть нужное нам расстояние.

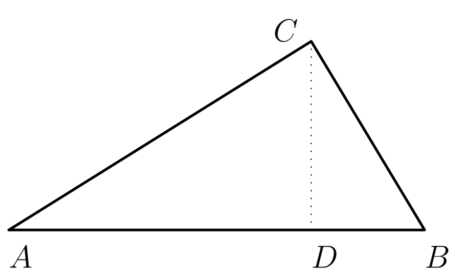

Рис. 35

Для его нахождения рассмотрим плоский рисунок (рис. 35). По условию задачи, $BC = 18$, а $\dfrac{AB}{AC} = 1,5$. Обозначив $AC = x$, получим $AB = 1,5x$. По теореме Пифагора имеем

$$(1,5x)^2 = x^2 + 18^2 \quad \text{или} \quad 1,25x^2 = 18^2.$$

Отсюда $AC=x=\dfrac{36}{\sqrt{5}}$, а $AB=\dfrac{54}{\sqrt{5}}$. По формулам площади треугольника

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}CD\cdot AB.$$

Поэтому

$$CD=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{36\cdot 18}{54}=12.$$

Ответ: 12.

Пример 2. Два противоположных ребра правильного тетраэдра служат диаметрами оснований цилиндра. Найти ребро тетраэдра, если известно, что объем цилиндра равен 256π.

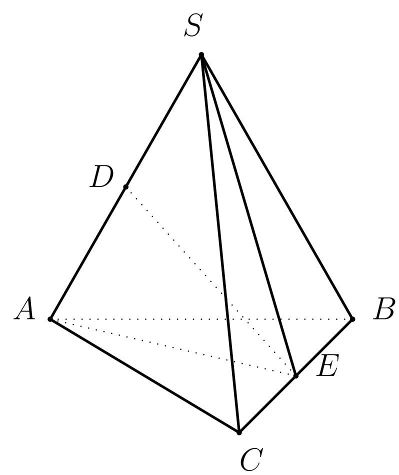

Рис. 36

Решение. Поскольку рисунок достаточно сложен, мы не будем рисовать цилиндр, а нарисуем только правильный тетраэдр (рис. 36). И пусть AS и CB — это диаметры нужного цилиндра. Для определения объема цилиндра нам нужно знать его высоту и радиус основания. Обозначим этот радиус через r, тогда по условию задачи $AS=CB=2r$. Проведем через середину D отрезка AS и через середину E отрезка BC прямую DE. Покажем, что это и есть высота нужного нам цилиндра.

Плоскость ASE перпендикулярна прямой CB, так как $CB\perp SE$ (SE — медиана, а значит и высота в правильном треугольнике CSB) и $CB\perp AE$ (AE — медиана, а значит и высота в правильном треугольнике ABC). По признаку перпендикулярности прямой и плоскости $ASE\perp CB$. Следовательно, прямая CB перпендикулярна любой прямой на плоскости ASE, в частности, $CB\perp AS$ и $CB\perp DE$.

Так как прямые CB и AS перпендикулярны, то для того, чтобы найти расстояние между этими скрещивающимися прямыми, достаточно построить прямую, перпендикулярную прямым CB и AS. Но это и есть прямая DE, поскольку мы показали, что она перпендикулярна CB и $DE\perp AS$ как медиана в равнобедренном треугольнике AES ($AE=ES$ как высоты в равных равносторонних треугольниках).

Итак, отрезок DE есть высота нужного нам цилиндра. Найдем его:

$$AE=\sqrt{AC^2-CE^2}=\sqrt{4r^2-r^2}=\sqrt{3}r,$$

и

$$DE=\sqrt{AE^2-AD^2}=\sqrt{3r^2-r^2}=\sqrt{2}r.$$

Поэтому объем V цилиндра равен $V=\pi r^2\cdot(\sqrt{2}r)=\pi r^3\sqrt{2}=256\pi$ по условию задачи.

Отсюда

$$r^3=\frac{256}{\sqrt{2}}=2^8\cdot 2^{-\frac{1}{2}}=2^{\frac{15}{2}}.$$

Тогда $r=2^{\frac{5}{2}}=4\sqrt{2}$, поэтому ребро тетраэдра равно $2r=8\sqrt{2}$.

Ответ: $8\sqrt{2}$.

Пример 3. Три ребра куба лежат на ребрах тетраэдра $ABCD$, а вершина P — на грани ABC. Найти ребро куба, если $DA=2$, $DB=4$, $DC=6$ (см. рис. 37).

Решение. Из условия задачи и рис. 37 мы видим, что ребра AD, BD, CD взаимно перпендикулярны. Введем прямоугольную систему координат, взяв за начало координат точку D, ось абсцисс направив по прямой DA, ось ординат — по прямой DC и ось аппликат — по прямой DB.

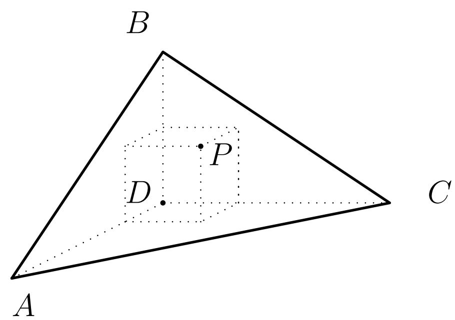

Рис. 37.

Тогда координаты точек A, C, B будут такие: $A(2,0,0)$, $B(0,0,4)$ и $C(0,6,0)$. Если ребро куба обозначить через x, то точка P будет иметь координаты $P(x,x,x)$ и лежать на плоскости, проходящей через точки A, B, C.

Соединим точку P с вершинами тетраэдра A, B, C, D, тогда наш тетраэдр разобьется на три пирамиды $ADCP$, $ABDP$, $BCDP$, а ребра куба будут их высотами (см. рис. 38). Эти высоты имеют длину, равную длине ребра куба x.

Найдем объем V первоначального тетраэдра $ABCD$. Он равен произведению длин ребер AD, DC, BD, деленному на 6 (ребра взаимно перпендикулярны!):

$$V=\frac{2\cdot 4\cdot 6}{6}=8.$$

Представим тот же объем в виде суммы объемов треугольных пирамид $ADCP$, $ABDP$, $BCDP$. Эти объемы равны произведению высоты x на площади соответствующих оснований (площади граней ADC, ADB, DBC) (все эти грани являются прямоугольными треугольниками), деленному на 3.

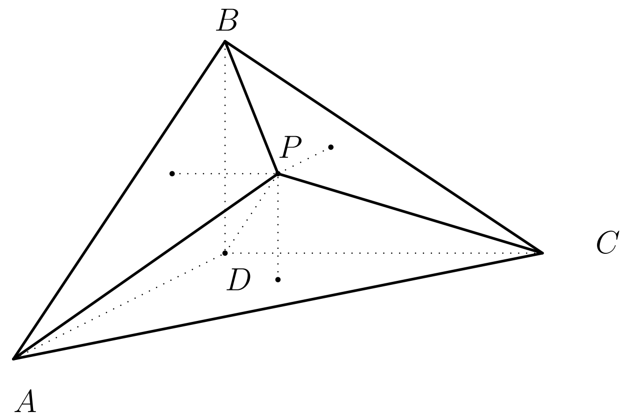

Рис. 38

Имеем

$$V=\frac{x\cdot 2\cdot 6}{6}+\frac{x\cdot 2\cdot 4}{6}+\frac{x\cdot 6\cdot 4}{6}=x\frac{12+8+24}{6}=x\frac{22}{3}.$$

Делитель 6 появился в знаменателе из-за того, что в формуле для площади грани есть делитель 2.

Сравнивая эти объемы, получаем уравнение

$$8=x\frac{22}{3}.$$

Отсюда $x=\dfrac{12}{11}$.

Ответ: $\dfrac{12}{11}$.

Пример 4. В треугольной пирамиде боковые ребра попарно перпендикулярны. Их длины составляют соответственно 2 см, 3 см и 4 см. Найти объем пирамиды.

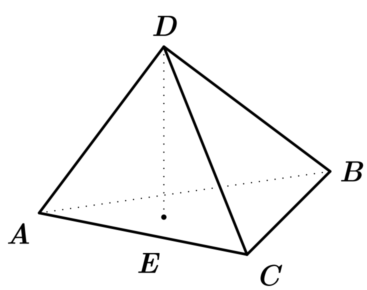

Рис. 39

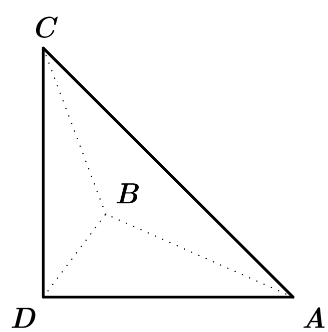

Рис. 40

Решение. Объем пирамиды вычисляется по формуле $V=\dfrac{1}{3}HS_{\text{осн}}$. При нахождении объема пирамиды $DABC$ (рис. 39) наибольшие трудности возникают при вычислении высоты DE. При решении задач про треугольную пирамиду со взаимно перпендикулярными боковыми ребрами используется специфический прием. Положим пирамиду на боковую грань ABD (рис. 40). Так как $CD \perp AD$ и $CD \perp BD$, то CD перпендикулярен плоскости основания ABD. Таким образом, CD является высотой пирамиды $CABD$. Площадь прямоугольного треугольника $ADB\,(AD \perp DB)$ вычисляют по формуле $S_{ADB} = \dfrac{1}{2} AD \cdot DB$. Отсюда объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3} \cdot CD \cdot \frac{1}{2} AD \cdot DB = \frac{1}{6} AD \cdot BD \cdot CD = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4\,\text{см}^3.$$

Ответ: 4 см^3.

Пример 5. Площадь осевого сечения цилиндра равна $\dfrac{6}{\pi}$ м^2. Найти площадь его боковой поверхности.

Решение. Осевым сечением цилиндра является прямоугольник, у которого одна из сторон — диаметр основания цилиндра, а еще одна сторона — образующая цилиндра (рис. 41). Отсюда площадь осевого сечения $S = 2RH$.

Площадь боковой поверхности цилиндра $S_{\text{бок.пов.}} = 2\pi RH = \pi S$. Окончательно $S_{\text{бок.пов.}} = \dfrac{6}{\pi} \cdot \pi = 6\,\text{м}^2$.

Ответ: 6м^2.

Пример 6. Высота конуса составляет $\dfrac{2}{3}$ от диаметра его основания. Найти отношение площади основания конуса к площади его боковой поверхности.

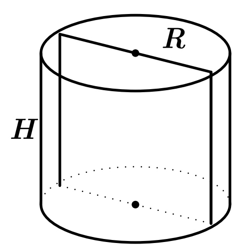

Рис. 41

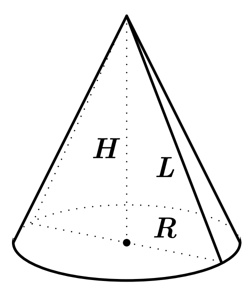

Рис. 42

Решение. Площадь основания конуса $S_{\text{осн.}} = \pi R^2$. Площадь боковой поверхности конуса $S_{\text{бок.пов.}} = \pi RL$, где L — длина образующей (рис. 42). По теореме Пифагора $L^2 = H^2 + R^2$; $H = \dfrac{2}{3} \cdot 2R = \dfrac{4}{3} R$. Отсюда $L = \sqrt{\dfrac{16}{9} R^2 + R^2} = \dfrac{5}{3} R$. Следовательно, конус имеет $S_{\text{бок.пов.}} = \pi R \cdot \dfrac{5}{3} R = \dfrac{5}{3} \pi R^2$. Искомое отношение

$$\frac{\pi R^2}{\frac{5}{3} \pi R^2} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Ответ: 0,6.

Пример 7. Объем шара равен 12. Найти объем другого шара, у которого площадь поверхности в 9 раз больше, чем у данного шара.

Решение. Все шары подобны друг другу. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия, а объемов — кубу коэффициента подобия: $\frac{S}{s}=k^2=9$. Отсюда $k=3$. Следовательно, $\frac{V}{v}=k^3=27$. Получаем $V=27\cdot v=27\cdot 12=324$.

Ответ: 324.

Пример 8. В конус, осевое сечение которого есть равносторонний треугольник, вписан шар. Найти объем конуса, если объем шара равен $\frac{32}{3}$.

Решение. Изобразим осевое сечение конуса (рис. 43). Сечение шара на этом рисунке является вписанным кругом, $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, где a — сторона треугольника. Радиус основания конуса $R=\frac{a}{2}$. Высота конуса $H=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

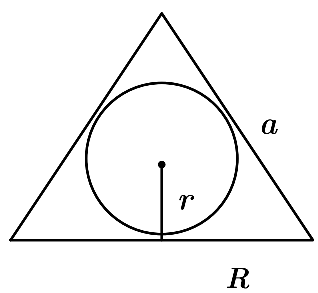

Рис. 43

Объем конуса

$$V_{\text{К}}=\frac{1}{3}\cdot H\cdot \pi R^2=\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\pi\cdot\frac{a^2}{4}.$$

Объем шара $V_{\text{Ш}}=\frac{4}{3}\pi r^3$. Так как $a=2\sqrt{3}r$, то

$$V_{\text{К}}=\frac{\pi\cdot\sqrt{3}\cdot 8\cdot 3\cdot\sqrt{3}r^3}{24}=3\pi r^3.$$

Отсюда

$$\frac{V_{\text{К}}}{V_{\text{Ш}}}=\frac{3\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3}=2,25,\ \ V_{\text{К}}=2,25\cdot V_{\text{Ш}}=2,25\cdot\frac{32}{3}=24.$$

Ответ: 24.

17.3. Аудиторные задачи

1. В треугольнике ABC катет $AB=3$, $\angle B=90^\circ$. Из вершины A к плоскости этого треугольника проведен перпендикуляр AM. Найти расстояние от точки M до стороны BC, если $AM=4$.

2. Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. Из точки O проведен к плоскости квадрата перпендикуляр OM. Найти расстояние от точки M до стороны BC, если $AD=6$, $OM=4$.

3. На расстоянии $1,5\pi^{-0,5}$ от центра шара проведена плоскость. Площадь полученного сечения равна 2,75. Найти площадь поверхности шара.

4. Расстояния между тремя точками сферы равны 12, 16 и 20, а расстояние от проходящей через них плоскости до центра сферы равно 24. Найти площадь сферы.

5. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания в 3,5 раза меньше бокового ребра. Найти двугранный угол при ребре основания пирамиды.

6. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен 120°, а боковые стороны по 10. Вне треугольника дана точка, удаленная от всех его вершин на 26. Найти расстояние от этой точки до плоскости треугольника.

7. Трапеция вписана в круг, причем меньшее ее основание, равное 16, стягивает дугу в 60°. На расстоянии 12 от плоскости трапеции находится точка, равноудаленная от всех вершин трапеции. Найти расстояние от этой точки до вершин трапеции.

8. Через центр O квадрата $ABCD$ проведен перпендикуляр OF к плоскости квадрата. Вычислить косинус угла между плоскостями BCF и $ABCD$, если $FB=5$, $BC=6$.

9. Сфера радиуса 2 касается всех граней правильной шестиугольной призмы. Найти длину ребра основания призмы.

10. Сфера проходит через все вершины прямоугольного параллелепипеда с ребрами 4, 6, 7. Найти площадь сферы.

11. Через одну из сторон ромба, диагонали которого равны 6 и 8, проведена плоскость α под углом 60° к плоскости ромба. Найти площадь проекции ромба на плоскость α.

12. В правильной треугольной пирамиде сторона основания в 2,5 раза меньше бокового ребра. Найти двугранный угол при ребре основания пирамиды.

13. Найти расстояние между противолежащими ребрами правильного тетраэдра, если его ребро равно 8.

14. Дан куб $ABCBA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найти расстояние между диагоналями AB_1 и A_1D.

15. Если ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1, то чему равно расстояние от точки A до плоскости сечения, проходящего через точки A_1BC.

16. В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен φ. Найти плоский угол при вершине пирамиды.

17. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через центр куба и середины ребер AB и BC, если ребро куба равно 1.

18. В треугольной пирамиде боковые ребра попарно перпендикулярны. Их длины соответственно равны 2, 4, 6. Найти объем пирамиды.

19. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 8 и 15, а угол между диагональю параллелепипеда и плоскостью основания равен $45°$. Найти высоту параллелепипеда.
20. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2. Найти расстояние между AD_1 и B_1C.
21. В прямом параллелепипеде стороны основания 10 и 17. Одна из диагоналей основания равна 21. Большая диагональ параллелепипеда равна 29. Найти объем параллелепипеда.
22. Основанием прямой призмы служит ромб. Площади диагональных сечений равны 6 и 8. Найти площадь боковой поверхности призмы.
23. Сторона основания правильной четырехугольной призмы $\sqrt{2}$, а ее диагональ составляет с плоскостью боковой грани угол $30°$. Найти объем призмы.
24. В правильной треугольной пирамиде угол между боковым ребром и плоскостью основания — $60°$, а радиус окружности, описанной около основания пирамиды, равен $\sqrt[3]{4}$. Найти объем пирамиды.
25. В правильной четырехугольной пирамиде проведено сечение, проходящее через середины двух смежных боковых ребер параллельно высоте пирамиды. Найти площадь этого сечения, если боковое ребро равно 18, а диагональ основания — $16\sqrt{2}$.
26. В треугольной пирамиде $SABC$ с высотой $SH=6$ все боковые ребра наклонены под углом $30°$ к плоскости основания ABC, а угол ABC равен $30°$. Найти длину ребра AC.
27. Пусть V, R, G соответственно число вершин, ребер и граней пирамиды. Найти значение $4R-G$, если $V=9$.
28. Найти объем усеченной пирамиды, если площади ее оснований 96 и 24, а высота соответствующей полной пирамиды равна 16.
29. Ребро правильного октаэдра равно $2\sqrt{6}$. Найти его объем.
30. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 3. Найти площадь сечения, проходящего через вершину A и середины ребер BB_1 и DD_1.
31. Дан тетраэдр $ABCD$, у которого ребра DA, DC, DB — взаимно перпендикулярны. Три ребра куба лежат на ребрах тетраэдра DC, DA и DB, а вершина P на грани ABC. Найти ребро куба, если $DA=1$, $DB=2$, $DC=4$.
32. Центры граней куба служат вершинами правильного октаэдра. Найти площадь поверхности октаэдра, если ребро куба равно $\sqrt{2}$.
33. Площадь поверхности шара равна 5π. Шар рассечен плоскостью. Длина окружности сечения шара равна π. Найти расстояние от центра шара до секущей плоскости.
34. Найти высоту цилиндра, если площадь его основания равна 1, а площадь боковой поверхности равна $\sqrt{\pi}$.
35. Осевым сечением цилиндра является квадрат с диагональю $3\sqrt[6]{\dfrac{2}{\pi^2}}$. Найти объем цилиндра.
36. Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник. Площадь полной поверхности конуса равна 18. Найти площадь основания конуса.
37. Радиус основания конуса равен $\sqrt[6]{\dfrac{15}{\pi^2}}$, а угол при вершине в развертке его боковой поверхности равен $90°$. Найти объем конуса.

38. Найти объем конуса, если его высота равна $\dfrac{3}{\sqrt[3]{\pi}}$, а расстояние от центра основания до образующей равно $\dfrac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$.
39. В цилиндр вписан конус так, что основания и высоты этих фигур совпадают. Во сколько раз объем цилиндра больше объема конуса?
40. Радиус шара, описанного около куба, равен 3. Найти площадь поверхности куба.
41. В куб вписан шар. Найти площадь поверхности шара, если площадь полной поверхности куба равна $\dfrac{1170}{\pi}$.
42. В шар, площадь поверхности которого равна 100π, вписан цилиндр. Найти высоту цилиндра, если радиус его основания равен 4.
43. Объем цилиндра равен 7,5. Найти объем вписанного в этот цилиндр шара.
44. Высота конуса — 8, образующая — 10. Найти радиус вписанного шара.
45. Высота конуса равна 3, образующая равна 6. Найти радиус описанного шара.

17.4. Домашнее задание

1. Найти расстояние от точки M до плоскости равнобедренного треугольника ABC, зная, что $AB=BC=13$, $AC=10$, а точка M удалена от каждой стороны треугольника на $8\dfrac{2}{3}$.
2. Равнобедренная трапеция, периметр которой равен 48, а острый угол — 60°, расположена в плоскости α. Точка, одинаково удаленная от всех сторон трапеции, находится на расстоянии 3 от плоскости α. Найти расстояние от этой точки до сторон трапеции.
3. Из вершины A правильного треугольника ABC проведен к плоскости перпендикуляр AM. Точка M соединена с точками B и C. Двугранный угол, образованный плоскостями ABC и MBC, равен 60°. Найти тангенс угла, образованного стороной MB с плоскостью треугольника ABC.
4. Сфера радиуса 4 проходит через все вершины куба. Найти длину ребра куба.
5. Диагональ куба равна 9. Найти площадь сферы, касающейся всех граней этого куба.
6. Найти ребро правильного тетраэдра, если расстояние между его противолежащими ребрами равно 1.
7. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором расстояние между диагоналями AB_1 и A_1D равно $\sqrt{3}$. Найти ребро куба.
8. Ребро куба равно $\dfrac{10}{\sqrt{2}}$. Найти расстояние от плоскости диагонального сечения куба до непересекающего его ребра.
9. Через середину диагонали куба перпендикулярно ей проведена плоскость. Определить площадь фигуры, получившейся в сечении куба этой плоскостью, если ребро куба равно a.
10. Площадь сечения куба плоскостью, проходящей через концы трех его ребер, выходящих из одной вершины, равна $18\sqrt{3}$. Найти длину ребра куба.

11. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны $2-\sqrt{2}$ и $2+\sqrt{2}$, а диагональ наклонена к плоскости основания под углом $60°$. Найти боковую поверхность.
12. В прямом параллелепипеде основанием служит параллелограмм со сторонами $a=3\sqrt{2}$ и $b=\sqrt{2}$ и острым углом $45°$. Площадь боковой поверхности параллелепипеда в 4 раза больше площади его основания. Найти объем параллелепипеда.
13. Все ребра прямой треугольной призмы имеют одинаковую длину. Площадь полной поверхности призмы равна $4+8\sqrt{3}$. Найти площадь ее основания.
14. В правильной треугольной призме через сторону основания проведено сечение под углом $30°$ к плоскости основания. Получился треугольник, площадь которого равна 8. Найти сторону основания призмы.
15. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ объемом 42 точка O — центр вписанной в треугольник SAB окружности, а боковое ребро в 7 раз больше ребра основания ABC. Найти объем пирамиды $OABC$.
16. Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна $9\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}}$ и наклонена к плоскости основания под углом $60°$. Найти объем шара, вписанного в пирамиду.
17. Найти площадь поверхности шара, описанного около конуса, у которого радиус основания $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$, а высота $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.
18. Шар вписан в конус, радиус основания которого равен 4, а периметр осевого сечения — 40. Найти длину линии касания шара и боковой поверхности конуса.
19. В шар вписан конус. Площадь осевого сечения конуса равна $\sqrt[3]{\dfrac{9}{\pi^2}}$, а угол между высотой и образующей равен $45°$. Найти объем шара.
20. В шар вписан конус, образующая которого равна диаметру основания. Найти отношение полной поверхности этого конуса к поверхности шара.
21. Образующая l конуса, равная $6\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}}$, наклонена к плоскости основания под углом $60°$. Найти объем шара, вписанного в конус.
22. Пусть V, R, G соответственно число вершин, ребер и граней усеченной пирамиды. Найти значение $2V-R$, если $G=11$.

17.5. Проверочный тест

1. Расстояния между тремя точками сферы равны 3, 4, 5, а расстояние от проходящей через них плоскости до центра сферы равно 6. Тогда площадь сферы равна

1) 169π; 2) $\dfrac{169\pi}{4}$; 3) 13π; 4) $\dfrac{13\pi}{4}$; 5) 169.

2. В правильной четырехугольной пирамиде основание в 2,5 раза меньше бокового ребра. Двугранный угол при ребре основания равен

1) $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{26}}$; 2) $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{24}}$; 3) $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{24}}$; 4) $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{26}}$; 5) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{26}}$.

3. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 12. Вне плоскости треугольника дана точка, удаленная от каждой из вершин треугольника на расстояние 10. Тогда расстояние от этой точки до плоскости треугольника равно

1) 4; 2) 8; 3) 6; 4) $6\sqrt{3}$; 5) $8\sqrt{2}$.

4. Два противоположных ребра правильного тетраэдра служат диаметрами оснований цилиндра. Если ребро тетраэдра равно $2\sqrt{2}$, то объем цилиндра равен

1) $4\sqrt{2}\pi$; 2) 4π; 3) 8π; 4) $2\sqrt{2}\pi$; 5) $8\sqrt{2}\pi$.

5. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при ребре основания равен 45°. Тогда косинус угла между боковым ребром и плоскостью основания равен

1) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$; 2) $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$; 3) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; 5) 30°.

6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведено сечение через вершину A и ребро BC. Если сторона основания призмы равна 21, а боковое ребро — 20, то периметр сечения равен

1) 61; 2) 122; 3) 71; 4) 62; 5) 79.

7. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 6, а апофема — 12, следовательно, высота пирамиды равна

1) $3\sqrt{13}$; 2) $6\sqrt{3}$; 3) $6\sqrt{13}$; 4) 6; 5) 9.

8. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 9 и 40, а угол между диагональю параллелепипеда и плоскостью основания равен 45°. Найдите высоту параллелепипеда.

9. Диаметр основания конуса равен 18, а радиус вписанного шара равен 7,2. Найти высоту конуса.

10. Основание пирамиды $SABC$ — треугольник ABC, в котором $\angle C=90°$, а катеты — 15 и 20. Ребро SC перпендикулярно плоскости основания, а двугранный угол при ребре AB равен 45°. Найдите объем пирамиды.

17.6. Ответы

Аудиторные задачи:

1. 5; **2.** 5; **3.** 20; **4.** 2704π; **5.** $\arccos 1/4\sqrt{3}$; **6.** $\arccos\dfrac{1}{4\sqrt{3}}$; **7.** 24; **8.** 20; **9.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$; **10.** 101π; **11.** 0,75; **12.** 12; **13.** $\arccos\dfrac{1}{6\sqrt{2}}$; **14.** $4\sqrt{2}$; **15.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; **16.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; **17.** $\pi-2\arcsin\dfrac{1}{2\sin(\varphi/2)}$. *Указание:* длину бокового ребра считать равной 1; **18.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$; **19.** 8; **20.** 17; **21.** 2; **22.** 3360; **23.** 20; **24.** 4; **25.** 3; **26.** $6\sqrt{3}$; **27.** 84; **28.** 55; **29.** 448; **30.** $32\sqrt{3}$; **31.** $\dfrac{4}{7}$; **32.** $2\sqrt{3}$; **33.** 1; **34.** 0,5; **35.** 3,375; **36.** 6; **37.** 5; **38.** 7,2; **39.** 3; **40.** 72; **41.** 195; **42.** 6; **43.** 5; **44.** 3; **45.** 6.

Домашнее задание:

1. 8; **2.** 6; **3.** 1,5; **4.** $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$; **5.** 27π; **6.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; **7.** 3; **8.** 10; **9.** $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$; **10.** 6; **11.** 48; **12.** 1,5; **13.** 2; **14.** 4; **15.** $\dfrac{14}{5}$; **16.** 40,5; **17.** 25; **18.** 6π; **19.** 4; **20.** 9/16; **21.** 12; **22.** 9.

18. Итоговый проверочный тест

1. Произведение всех корней уравнения

$$64\cdot x^{3\log_2 x-9}=1$$

равно

1) 0; 2) 2; 3) 4; 4) 1; 5) 8.

2. Пусть $\log_2 3=a$, $\log_3 5=b$. Найти $\log_{60} 300$

1) $\dfrac{2+a+2ab}{2+a+ab}$; 2) $\dfrac{1+a+2ab}{2+a+ab}$; 3) $\dfrac{2-a+ab}{2+a-ab}$; 4) $\dfrac{2+a+ab}{1+a+2ab}$; 5) $\dfrac{2+a+ab}{1+a+ab}$.

3. Найти последнюю цифру числа 23^{1998}

1) 3; 2) 7; 3) 9; 4) 5; 5) 1.

4. Область определения функции

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot 3^x$$

— первые шесть натуральных чисел. Найти сумму значений функции

1) 566; 2) 516; 3) 546; 4) 506; 5) 536.

5. Если сумма двух чисел равна 47, то максимальное значение их произведения равно

1) $553{,}5$; 2) $552{,}25$; 3) 552; 4) 525; 5) 559.

6. Произведение корней уравнения

$$(1+x+x^2)(6-x-x^2)=10$$

равно

1) -4; 2) 6; 3) 4; 4) 1; 5) 5.

7. Система уравнений

$$\begin{cases} x+ky & =2k+1,\\ 2|x-1| & =y-2, \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений при значениях k, равных

1) $k=\dfrac{1}{2}$; 2) $k=2$; 3) $k=-2$; 4) $k=0$; 5) $k=\pm\dfrac{1}{2}$.

8. Сумма коэффициентов и свободного члена приведенного квадратного уравнения, корнями которого являются $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, удовлетворяющие соотношению

$$3\sin\alpha+3\cos\alpha=-1,$$

равна

1) $\dfrac{5}{9}$; 2) $\dfrac{7}{9}$; 3) $\dfrac{1}{3}$; 4) $-\dfrac{1}{3}$; 5) $\dfrac{8}{9}$.

9. Все решения неравенства

$$\sin 2x>\cos x$$

на промежутке $[0, \pi]$ составляют множество

1) $[\pi/6; \pi/2) \cup (5\pi/6; \pi]$; 2) $[0; \pi/6)$; 3) $(\pi/6; \pi/2) \cup (5\pi/6; \pi]$; 4) $[0; \pi/6]$; 5) $(\pi/2; \pi]$.

10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра AB, AD и AA_1 равны соответственно 3,4 и 2. Тогда косинус угла между диагоналями AD_1 и A_1C равен

1) $\dfrac{\sqrt{13}}{5}$; 2) $\dfrac{6}{\sqrt{145}}$; 3) $-\dfrac{6\sqrt{145}}{145}$; 4) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $\dfrac{2}{\sqrt{13}}$.

11. Значение выражения

$$16^{\frac{1}{2\log_9 4}}$$

равно

1) 4; 2) 3; 3) 9; 4) 1/9; 5) 16.

12. Если x_0 — корень уравнения

$$\sqrt[3]{5+x} - 2\sqrt[3]{5-x} = \sqrt[6]{25-x^2},$$

то значение выражения $\dfrac{2x_0}{x_0-5}$ равно

1) -63; 2) 26; 3) $-1/5$; 4) 5; 5) $-2/5$.

13. Область значений функции

$$y = 10^{1-2\cos x}$$

есть множество

1) $(0; 1000)$; 2) $[1000; +\infty)$; 3) $[0; 1000]$; 4) $[0,1; 1000]$; 5) $[0,1; +\infty)$.

14. Значение выражения $\dfrac{T+3\pi}{T-2\pi}$, где T — наименьший положительный период функции

$$y = 3\sin\frac{4x+1}{3} - \cos\frac{x}{2} + 2\,\mathrm{tg}(2x-1),$$

равно

1) $\dfrac{9}{4}$; 2) $\dfrac{7}{8}$; 3) 6; 4) $\dfrac{3}{2}$; 5) $\dfrac{4}{3}$.

15. Сумма всех корней уравнения

$$(x^2-x+1)^{(x^2+1)/2} = (x^2-x+1)^{2x+3}$$

равна

1) 6; 2) 5; 3) 0; 4) 4; 5) 1.

16. Прямой параллелепипед, в основании которого лежит ромб с площадью 10, имеет диагональные сечения 8 и 10. Тогда объем параллелепипеда равен

1) 60; 2) 50; 3) 20; 4) 30; 5) 40.

17. Высота усеченной пирамиды равна 7, площадь большего основания 36, а высота соответствующей полной пирамиды 14. Тогда объем усеченной пирамиды равен

1) 147; 2) 144; 3) 150; 4) 153; 5) 141.

18. В шар радиуса 10 вписан конус, высота которого больше радиуса шара. Если радиус основания конуса равен 6, то объем конуса равен

1) 216π; 2) $241\dfrac{2}{3}\pi$; 3) 209π; 4) $202\dfrac{1}{6}\pi$; 5) 225π.

19. Значения параметра a, для которых уравнение

$$\sqrt{2}\sin x - a\cos x = 2$$

не имеет решений, составляют множество

1) $(-\infty; \sqrt{2})$; 2) $(-\infty; -\sqrt{2})$; 3) $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$;
4) $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$; 5) $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

20. Найти частное от деления наименьшего общего кратного на наибольший общий делитель чисел 495 и 105

1) 165; 2) 231; 3) 385; 4) 235; 5) 221.

21. Разность второго и первого членов геометрической прогрессии с положительными членами равна 18, а разность четвертого и третьего ее членов равна 162. Найти сумму первых трех членов этой прогрессии.

22. Найти производную функции

$$y = \operatorname{tg}(100x - 20) + \frac{4}{25x^2 - 10x + 2}$$

в точке $x_0 = \dfrac{1}{5}$.

23. Касательная к графику функции

$$y = 2x^2 + ax + 3$$

в точке $x_0 = 1$ проходит через точку $(2; 37)$. Найти a.

24. Упростить выражение

$$\left(\frac{\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{x}}\right) \cdot \left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 2\right).$$

25. Пусть вектор $\vec{a}(3, m, -1)$ перпендикулярен вектору $\vec{b}(2, 1, n)$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Найти значение выражения $m + n$.

26. Один из корней квадратного уравнения является средним арифметическим, а другой — средним геометрическим корней уравнения

$$3x^2 + 8\sqrt{3}x + 36 = 0.$$

Найти это уравнение.

27. Найти сумму модулей корней уравнения

$$x^2 - |x| - 6 = 0.$$

28. Найти решение неравенства

$$\frac{x^4+8x^3+15x^2}{x+3}>0.$$

29. Найти корни уравнения

$$4\log_2 x^2=\log_2^2(-x)+16.$$

30. Найти все решения неравенства

$$\sqrt{x-2}-\sqrt{x+\sqrt{x+3}-2}<5.$$

Список литературы

[1] Амелькин, В. В. *Задачи с параметрами: справочное пособие по математике*/ В.В.Амелькин, В.Л.Рабцевич. — М.: УНЦ ДО МГУ, 1996.

[2] Башмаков, М. И. *Задачи по математике. Алгебра и анализ*/ М.И.Башмаков, Б.М.Беккер, В.М.Гольховой. — М.: Наука, 1982.

[3] Болгарский, Б. В. *Очерки по истории математики*/ Б.В.Болгарский. — Минск: Вышейшая школа, 1974.

[4] Вавилов, В. В. *Задачи по математике. Уравнения и неравенства: справочное пособие*/ В.В.Вавилов и др. — М.: Наука, 1987.

[5] Вавилов, В. В. *Задачи по математике. Алгебра: справочное пособие*/ В.В.Вавилов и др. — М.: Наука, 1988.

[6] Горштейн, П. И. *Задачи с параметрами*/ П.И.Горштейн и др. — Киев: РИА Тест, 1992.

[7] Демидович, Б. П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*/ Б.П.Демидович. — М.: Наука, 1972.

[8] Звавич, Л. И. *Задачи письменного экзамена по математике за курс средней школы: условия и решения*/ Л.И.Звавич, Л.Я.Шляпочник. — М.: Школа–Пресс, 1994.

[9] Крамор, В. С. *Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа*/ В.С.Крамор. — М.: Просвещение, 1990.

[10] Крысицкий, В. *Шеренга великих математиков*/ В.Крысицкий (ред.) — Варшава: Наша ксенгария, 1970.

[11] Мельников, И. И. *Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах*/ И.И.Мельников, И.Н.Сергеев. — М.: Изд-во МГУ, 1994.

[12] Олехник, С. Н. *Нестандартные методы решения уравнений и неравенств*/ С.Н.Олехник, М.К.Потапов, П.И.Пасиченко. — М.: Изд-во МГУ, 1991.

[13] Пойа, Д. *Математическое открытие*/ Д.Пойа. — М.: Наука, 1976.

[14] Потапов, М. К. *Конкурсные задачи по математике*/ М.К.Потапов и др. — М.: Просвещение, 1992.

[15] Сканави, М. И. *Сборник конкурсных задач для поступающих во втузы*/ М.И.Сканави (ред.) — М.: Высшая школа, 1994.

[16] Симонов, А. Я. *Система тренировочных задач и упражнений по математике*/ А.Я.Симонов и др. — М.: Просвещение, 1991.

[17] Соминский, И. С. *Элементарная алгебра. Дополнительный курс*/ И.С.Соминский — М.: Наука, 1967.

[18] Тихомиров, В .М. *Рассказы о максимумах и минимумах*/ В.М.Тихомиров. — М.: Наука, 1986.

[19] Фридман, Л. М. *Как научиться решать задачи*/ Л.М.Фридман, Е.Н.Турецкий. — М.: Просвещение, 1989.

[20] Хинчин, А. Я. *Восемь лекций по математическому анализу*/ А.Я.Хинчин. — М.: Наука, 1977.

[21] Цыпкин, А. Г. *Справочник по методам решения задач по математике*/ А.Г.Цыпкин, А.И.Пинский. — М.: Наука, 1989.

[22] Черкасов, О. Ю. *Математика. Интенсивный курс подготовки к экзамену*/ О.Ю.Черкасов, А.Г.Якушев. — М.: Айрис Рольф, 1997.

[23] Чистяков, В. Д. *Старинные задачи по элементарной математике*/ В.Д.Чистяков. — Минск: Вышейшая школа, 1978.

[24] Шабунин, М. И. *Математика для поступающих в вузы. Уравнения и системы уравнений*/ М.И.Шабунин. — М.: Аквариум, 1997

[25] Шабунин, М. И. *Математика для поступающих в вузы. Неравенства и системы неравенств*/ М.И.Шабунин. — М.: Аквариум, 1997

[26] Шарыгин, И. Ф. *Факультативный курс по математике*/ И.Ф.Шарыгин. — М.: Просвещение, 1989.

[27] Шарыгин, И. Ф. *Факультативный курс по математике: Решение задач: учеб. пособие для 11 кл. сред. шк.*/ И.Ф.Шарыгин, В.И.Голубев. — М.: Просвещение, 1991.

[28] *Пособие по математике для поступающих в вузы*/ под ред. Г.Н.Яковлева — М.: Наука, 1982.

Содержание

Учебное издание

МАТЕМАТИКА
АДАПТАЦИОННЫЙ КУРС

Учебное пособие

Кытманов Александр Мечиславович
Лейнартас Евгений Константинович
Мысливец Симона Глебовна

Редактор Т.М.Пыжик
Корректор М.В.Саблина

Подписано в печать 25.06.2009. Печать плоская
Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 11,3
Тираж 150 экз. Заказ 1/104

Издательско-полиграфический комплекс
Сибирского федерального университета
660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79
Отпечатано в типографии ИПК СФУ
660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79