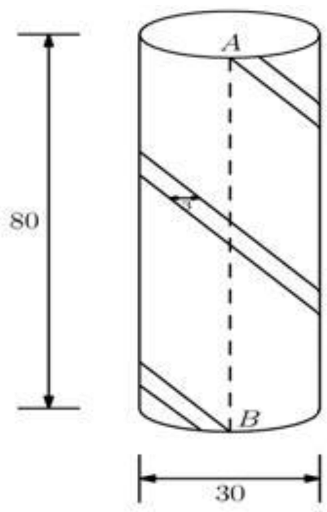
УНИВЕРСИТЕТСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 11-Х КЛАССОВ

1) Найдите наименьшее четырёхзначное число, если даны всевозможные произведения его цифр, взятые по 3: 60, 80, 96, 240.

2) Цилиндр имеет диаметр 30 см и высоту 80 см. На два полных оборота вокруг цилиндра наносится полоса, «ширина» которой, измеренная горизонтально, равна 3 см (см. рисунок). Какова площадь полосы в квадратных сантиметрах?



3) Каждый из трёх абитуриентов задумал по целому числу от 1 до 5. Какова вероятность, что число первого меньше числа второго, а число второго меньше числа третьего?

4) Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases}(|x| - x)^2 + (|y| - y)^2 \leq 16, \\ 2y + x \leq 0\end{cases}$$

и найдите площадь полученной фигуры.

5) Два студента Петя и Вася играют в следующую игру. Вначале на доске нарисовано 40 синих и 50 чёрных точек. Игроки ходят по очереди. Первый ход делает Петя. Ход состоит в том, что игрок выбирает цвет и стирает с доски произвольное (по своему усмотрению) число точек этого цвета, являющееся делителем числа точек другого цвета на момент хода (ноль делится на любое натуральное число). Выигрывает тот, кто стирает последнюю точку. Может ли кто-то из студентов гарантировать себе победу?

*Победители и призеры олимпиады получат дополнительные баллы к сумме баллов, полученных на ЕГЭ.
Раздел для абитуриента на сайте ИМиФИ СФУ: http://math.sfu-kras.ru/abiturient
Общественная приемная для абитуриентов: http://math.sfu-kras.ru/abiturient/anteroom

УНИВЕРСИТЕТСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 11-Х КЛАССОВ

РЕШЕНИЯ

1) Обозначим цифры числа x, y, z, t. Тогда

$$\begin{cases} xyz = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5, \\ xyt = 80 = 2^4 \cdot 5, \\ yzt = 96 = 2^5 \cdot 3, \\ xzt = 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5. \end{cases}$$

Перемножив уравнения системы, получаем $(xyzt)^3 = 2^{15} \cdot 3^3 \cdot 5^3$, откуда $xyzt = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$. Отсюда $x = 5, y = 2,\ z = 6,\ t = 8$. Наименьшее четырёхзначное число – 2568.

Ответ. 2568.

2) Поверхность цилиндра можно развернуть в прямоугольник, а полоса на развёртке представляет собой параллелограмм с основанием 3 см и высотой 80 см. Таким образом, площадь полосы равна $3 \cdot 80 = 240$ см^2.

Ответ. 240 см^2.

3) Всего могло быть задумано $5^3 = 125$ последовательностей. Число возрастающих последовательностей равно числу неупорядоченных троек различных чисел (так как упорядочить по возрастанию каждую тройку можно единственным образом). Число неупорядоченных троек различных чисел равно $\frac{5\cdot4\cdot3}{3!} = 10$, поэтому вероятность равна $\frac{10}{125} = \frac{2}{25}$.

Ответ. $\frac{2}{25}$.

4) Рассмотрим первое неравенство. Возможны четыре случая.

1) $x \geq 0, y \geq 0$ (первая четверть). Тогда $0 \leq 16$, неравенству удовлетворяют все точки первой четверти.

2) $x < 0, y \geq 0$ (вторая четверть). Тогда $4x^2 \leq 16$, $|x| \leq 2$; в этом случае $x < 0$, поэтому $-2 \leq x < 0$.

3) $x < 0, y < 0$ (третья четверть). Тогда $4x^2 + 4y^2 \leq 16$, $x^2 + y^2 \leq 4$; в этом случае $x < 0$, $y < 0$, поэтому получаем точки, лежащие в четверти круга с центром $O(0;0)$ радиуса 2.

4) $x \geq 0, y < 0$ (четвёртая четверть). Тогда $4y^2 \leq 16$, $|y| \leq 2$; в этом случае $y < 0$, поэтому $-2 \leq y < 0$.

Второе неравенство задаёт множество точек, расположенных на прямой $y = -\frac{x}{2}$ или ниже.

Множество точек, удовлетворяющих системе неравенств, представляет собой объединение:

– четверти круга с центром $O(0;0)$ радиуса 2, лежащей в третьей четверти (площадь π),

– треугольника с вершинами $O(0;0)$, $A(-2;1)$, $B(-2;0)$ (площадь 1),

– треугольника с вершинами $O(0;0)$, $C(4;-2)$, $D(0;-2)$ (площадь 4).

Значит, площадь множества равна $5 + \pi$.

Ответ. $5 + \pi$.

5) Пусть в какой-то момент на доске нарисовано a синих и b чёрных точек. Тогда:

(1) если a и b имеют разную чётность, то ходящий выигрывает, поскольку если чётное число равно 0, то ему для выигрыша нужно просто стереть оставшиеся точки (их число – делитель нуля), а если оба числа не равны 0, то он стирает из чётного числа точек 1 (заведомо – делитель другого числа) и приходит к следующей ситуации (2), когда оба числа нечётны;

(2) если a и b нечётны, то ходящий проигрывает, так как он вынужден из одного нечётного числа стереть также нечётное число (делитель нечетного числа) и получить чётное, то есть создать ситуацию из (1), выигрышную для противника;

(3) если a и b чётны, то каждый игрок вынужден стирать чётное число точек, так как иначе он создает ситуации (1), выигрышную для противника. Поэтому мы можем рассматривать не точки, а пары точек, и решение задачи для $(2a;\ 2b)$ эквивалентно решению задачи для $(a;\ b)$. Именно такая ситуация задана в условии, где $a = 20$, $b = 25$, поэтому задача сводится к случаю (2) и выигрывает Петя.

Ответ. Петя.