Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Сибирский федеральный университет

Сборник задач по комплексному анализу

(краткий курс)

Учебно-методическое пособие

Красноярск
2020

Составители: Н.А. Бушуева, В.М. Трутнев.

Сборник задач по комплексному анализу (краткий курс): учеб.-метод. пособие / сост.: Н.А. Бушуева, В.М. Трутнев. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2020. 28 с.

§ 1. Комплексные числа

1. (1) Выполнить указанные действия:

1) $\dfrac{1}{i}$; 2) $\dfrac{1-i}{1+i}$; 3) $\dfrac{2}{1-3i}$; 4) $(1+i\sqrt{3})^3$.

2. (2) Найти модули и аргументы комплексных чисел (a и b – действительные числа):

1) $3i$; 2) -2; 3) $1+i$; 4) $-1-i$; 5) $2+5i$; 6) $2-5i$;
7) $-2+5i$; 8) $-2-5i$; 9) bi $(b\neq 0)$; 10) $a+bi$ $(a\neq 0)$.

3. (3) Решить уравнение $\overline{z}=z^{n-1}$ (n – натуральное число).

4. (4) Найти все значения следующих корней и построить их:

1) $\sqrt[3]{1}$; 2) $\sqrt[3]{i}$; 3) $\sqrt[4]{-1}$; 4) $\sqrt[6]{-8}$; 5) $\sqrt[8]{1}$;
6) $\sqrt{1-i}$; 7) $\sqrt{3+4i}$; 8) $\sqrt[3]{-2+2i}$; 9) $\sqrt[5]{-4+3i}$.

5. (5) Доказать, что оба значения $\sqrt{z^2-1}$ лежат на прямой, проходящей через начало координат и параллельной биссектрисе внутреннего угла треугольника с вершинами в точках -1, 1 и z, проведенной из вершины z.

6. (6) Пусть m и n – целые числа. Показать, что $(\sqrt[n]{z})^m$ имеет $\frac{n}{(n,m)}$ различных значений, где (n,m) – наибольший общий делитель чисел m и n. Убедиться, что множества значений $(\sqrt[n]{z})^m$ и $\sqrt[n]{z^m}$ совпадают тогда и только тогда, когда $(n,m)=1$, т.е. n и m взаимно просты.

7. (8) Исходя из геометрических рассуждений, доказать неравенства

1) $\left|\dfrac{z}{|z|}-1\right|\leqslant|\arg z|$; 2) $|z-1|\leqslant\big||z|-1\big|+|z|\cdot|\arg z|$.

8. (14) Доказать, что если $z_1+z_2+z_3=0$ и $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, то точки z_1, z_2, z_3 являются вершинами правильного треугольника, вписанного в единичную окружность.

9. (15) Найти вершины правильного n-угольника, если его центр находится в точке $z=0$, а одна из вершин z_1 известна.

10. (16) Точки z_1 и z_2 – смежные вершины правильного n-угольника. Найти вершину z_3, смежную с z_2 $(z_3\neq z_1)$.

11. (17) Даны три вершины параллелограмма z_1, z_2, z_3. Найти четвертую вершину z_4, противоположную вершине z_2.

В задачах **12–20** требуется выяснить геометрический смысл указанных соотношений.

12. (23) $|z-z_0|<R$; $|z-z_0|>R$; $|z-z_0|=R$.

13. (24) $|z-2|+|z+2|=5$.

14. (25) $|z-2|-|z+2|>3$.

15. (26) $|z-z_1|=|z-z_2|$.

16. (27) 1) $\Re e\, z\geqslant C$; 2) $\Im m\, z<C$.

17. (28) $0<\Re e\,(iz)<1$.

18. (29) $\alpha < \arg z < \beta$; $\alpha < \arg(z - z_0) < \beta$ $(-\pi < \alpha < \beta \leqslant \pi)$.

19. (30) $|z| = \Re e\, z + 1$.   **20.** (31) $\Re e\, z + \Im m\, z < 1$.

В задачах **21–22** требуется определить семейства линий в z-плоскости, заданных соответствующими уравнениями.

21. (35) 1) $\Re e\, \frac{1}{z} = C$;   2) $\Im m\, \frac{1}{z} = C$ $(-\infty < C < \infty)$.

22. (36) 1) $\Re e\, z^2 = C$;   2) $\Im m\, z^2 = C$ $(-\infty < C < \infty)$.

Стереографическая проекция

23. (44) Вывести формулы стереографической проекции, выражающие координаты (ξ, η, ζ) точки P сферы диаметром 1, касающейся z-плоскости в начале координат, через координаты (x, y) соответствующей точки z. Выразить также x и y через ξ, η, ζ (оси ξ и η предполагаются совпадающими соответственно с осями x и y).

24. (45) Каковы на сфере образы точек 1, -1, i, $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$?

25. (46) Каков на плоскости образ параллели с широтой β $\left(-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$? Чему соответствуют „южный“ и „северный“ полюсы?

26. (47) Найти на сфере образы:

1) лучей $\arg z = \alpha$;   2) окружностей $|z| = r$.

27. (48) Каково на сфере взаимное расположение пары точек, взаимно симметричных:

1) относительно точки $z = 0$; 2) относительно действительной оси;

3) относительно единичной окружности.

28. (49) При каком условии точки z_1 и z_2 являются стереографическими проекциями двух диаметрально противоположных точек сферы?

29. (51) Найти на сфере образы областей, определенных неравенствами

1) $\Im m\, z > 0$;   2) $\Im m\, z < 0$;   3) $\Re e\, z > 0$;

4) $\Re e\, z < 0$;   5) $|z| < 1$;   6) $|z| > 1$.

§ 2. Элементарные трансцендентные функции

30. (59) Представить в показательной форме числа 1, -1, i, $-i$, $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$.

31. (60) Найти $e^{\pm\frac{\pi i}{2}}$; $e^{k\pi i}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

32. (61) Найти модули и главные значения аргументов комплексных чисел e^{2+i}, e^{2-3i}, e^{3+4i}, e^{-3-4i}, $-ae^{i\varphi}$ $(a > 0,\ |\varphi| \leqslant \pi)$; $e^{i\alpha} - e^{i\beta}$ $(0 \leqslant \beta < \alpha \leqslant 2\pi)$.

33. (62) Найти суммы

1) $1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$;

2) $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$;
3) $\cos x + \cos 3x + \cdots + \cos(2n-1)x$;
4) $\sin x + \sin 3x + \cdots + \sin(2n-1)x$;
5) $\sin x - \sin 2x + \cdots + (-1)^{n-1}\sin nx$.

34. (63) Найти суммы
1) $\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cdots + \cos(\alpha+n\beta)$;
2) $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \cdots + \sin(\alpha+n\beta)$.

35. (64) Исходя из определения соответствующих функций, доказать:
1) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$; 2) $\sin z = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - z\right)$;
3) $\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$;
4) $\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$.

36. (66) Доказать, что:
1) $\sin iz = i\ \mathrm{sh}\, z$; 2) $\cos iz = \mathrm{ch}\, z$;
3) $\mathrm{tg}\, iz = i\ \mathrm{th}\, z$; 4) $\mathrm{ctg}\, iz = -i\ \mathrm{cth}\, z$.

37. (71) Вычислить
1) $\mathrm{Ln}\, 4$, $\mathrm{Ln}(-1)$, $\ln(-1)$; 2) $\mathrm{Ln}\, i$, $\ln i$;
3) $\mathrm{Ln}\,\dfrac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$; 4) $\mathrm{Ln}(2-3i)$, $\mathrm{Ln}(-2+3i)$.

38. (74) Найти все значения следующих степеней:
1) $1^{\sqrt{2}}$; 2) $(-2)^{\sqrt{2}}$; 3) 2^i; 4) 1^{-i}; 5) i^i;
6) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$; 7) $(3-4i)^{1+i}$; 8) $(-3+4i)^{1+i}$.

39. (75) Показать, что в случае рационального показателя степени ($\alpha = \frac{m}{n}$) общее определение степени z^α совпадает с обычным определением
$$z^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{z}\right)^m.$$

40. (76) Совпадают ли множества значений $a^{2\alpha}$, $(a^\alpha)^2$, $(a^2)^\alpha$?

41. (77) Доказать следующие равенства (для корней берутся все их значения):
1) $\mathrm{Arccos}\, z = -i\ \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2-1})$;
2) $\mathrm{Arcsin}\, z = -i\ \mathrm{Ln}\, i(z + \sqrt{z^2-1})$;
3) $\mathrm{Arctg}\, z = \dfrac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\,\dfrac{i+z}{i-z} = \dfrac{1}{2i}\,\mathrm{Ln}\,\dfrac{1+iz}{1-iz}$;
4) $\mathrm{Arcctg}\, z = \dfrac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\,\dfrac{z-i}{z+i}$.

42. (81) Найти все значения следующих функций:
1) $\mathrm{Arcsin}\,\dfrac{1}{2}$; 2) $\mathrm{Arccos}\,\dfrac{1}{2}$; 3) $\mathrm{Arccos}\, 2$; 4) $\mathrm{Arcsin}\, i$;
5) $\mathrm{Arctg}(1+2i)$; 6) $\mathrm{Arch}\, 2i$; 7) $\mathrm{Arth}(1-i)$.

43. (82) Найти все корни следующих уравнений:

1) $\sin z + \cos z = 2$;
2) $\sin z - \cos z = 3$;
3) $\sin z - \cos z = i$;
4) $\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z = 1$;
5) $\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z = 2i$;
6) $2 \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = i$.

44. (83) Найти все корни следующих уравнений:
1) $\cos z = \operatorname{ch} z$; 2) $\sin z = i \operatorname{sh} z$; 3) $\cos z = i \operatorname{sh} 2z$.

§ 3. Функции комплексного переменного

Комплексные функции действительного переменного

В задачах **45–49** определить линии, заданные указанными уравнениями.

45. (109) $z = 1 - it$; $0 \leqslant t \leqslant 2$.

46. (110) $z = t + it^2$; $-\infty < t < \infty$.

47. (111) $z = t^2 + it^4$; $-\infty < t < \infty$.

48. (112) $z = a(\cos t + i \sin t)$; $\dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$; $a > 0$.

49. (113) $z = t + \dfrac{i}{t}$; $-\infty < t < 0$.

Функции комплексного переменного

50. (116) Для отображения $w = z^2$ требуется:

1) найти образы линий $x = C$, $y = C$, $x = y$, $|z| = R$, $\arg z = \alpha$ и выяснить, какие из них преобразуются взаимно-однозначно;

2) найти прообразы (на z-плоскости) линий $u = C$, $v = C$ ($w = u + iv$).

51. (117) Для отображения $w = \dfrac{1}{z}$ найти

1) образы линий $x = C$, $y = C$, $|z| = R$, $\arg z = \alpha$, $|z - 1| = 1$;

2) прообразы линий $u = C$, $v = C$.

52. (118) Для отображений $w = z + \dfrac{1}{z}$ и $w = z - \dfrac{1}{z}$ найти образы окружностей $|z| = R$.

53. (119) Для преобразования $w = z + \dfrac{1}{z}$ найти на z-плоскости прообраз прямоугольной сетки ($u = C$, $v = C$) плоскости w.

54. (120) Во что преобразуется окружность $|z| = 1$ при отображении $w = \dfrac{z}{(1 - z)^2}$?

55. (121) Для отображения $w = e^z$ найти

1) образы линий $x = C$, $y = C$, $x = y$;

2) прообразы линий $\rho = \theta$ ($0 \leqslant \theta < \infty$).

§ 4. Аналитические функции

Условия Коши-Римана

56. (131) Проверить выполнение условий Коши-Римана для функций z^n, e^z, $\cos z$, $\operatorname{Ln} z$ и доказать, что

$(z^n)' = nz^{n-1}$, $(e^z)' = e^z$, $(\cos z)' = -\sin z$, $(\operatorname{Ln} z)' = \dfrac{1}{z}$.

57. (132) Найти постоянные a, b, c, при которых функция $f(z)$ будет аналитической:

1) $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$;

2) $f(z) = \cos x(\operatorname{ch} y + a \operatorname{sh} y) + i \sin x(\operatorname{ch} y + b \operatorname{sh} y)$.

58. (133) Найти области, в которых функция

$$f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$$

будет аналитической.

59. (134) $f(z) = u + iv = \rho e^{i\theta}$ – аналитическая функция. Доказать, что если одна из функций u, v, ρ, θ тождественно равна постоянной, то и функция $f(z)$ постоянна.

60. (135) Пусть $z = re^{i\varphi}$ и $f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$. Записать уравнения Коши-Римана в полярных координатах.

61. (137) Доказать, что функция $f(z) = \overline{z}$ нигде не дифференцируема.

62. (138) Доказать, что функция $w = z\Re e\, z$ дифференцируема только в точке $z = 0$; найти $w'(0)$.

63. (139) Доказать, что для функции $f(z) = \sqrt{|xy|}$ в точке $z = 0$ выполняются условия Коши-Римана, но производная не существует.

64. (143) Пусть $w = f(x) = u + iv$ и $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке z. Доказать, что множество всевозможных предельных значений отношения $\dfrac{\triangle w}{\triangle z}$ при $\triangle z \to 0$ – есть либо точка, либо окружность.

Гармонические функции

В задачах **65–67** найти функции, сопряженные с данными гармоническими функциями в указанных областях.

65. (159) $u(x, y) = x^2 - y^2 + x, \quad 0 \leqslant |z| < \infty$.

66. (160) $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}, \quad 0 < |z| < \infty$.

67. (161) $u(x, y) = \dfrac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$

а) в области, полученной из плоскости удалением полуоси $y = 0$, $-\infty < x \leqslant 0$;

б) в плоскости с выколотым началом координат ($0 < |z| < \infty$).

В задачах **68–71** найти аналитические функции $f(z) = u + iv$, по заданной действительной или мнимой части.

68. (165) $u = x^2 - y^2 + 5x + y - \dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

69. (166) $u = e^x(x\cos y - y\sin y) + 2\sin x \,\mathrm{sh}\, y + x^3 - 3xy^2 + y$.

70. (167) $v = 3 + x^2 - y^2 - \dfrac{y}{2(x^2 + y^2)}$.

71. (168) $v = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$.

В задачах **72–75** доказать существование и найти аналитические функции $f(z)$ по заданному модулю или аргументу.

72. (177) $\rho = (x^2 + y^2)e^x$.

73. (178) $\rho = e^{r^2 \cos 2\varphi}$.

74. (179) $\theta = xy$.

75. (180) $\theta = \varphi + r\sin\varphi$.

Геометрический смысл модуля и аргумента производной

76. (187) Отображение совершается с помощью функции $w = z^2$ и $w = z^3$. Найти угол поворота (ϑ) и коэффициент растяжения (k) в следующих точках:

1) $z_0 = 1$; 2) $z_0 = -\dfrac{1}{4}$; 3) $z_0 = 1 + i$; 4) $z_0 = -3 + 4i$.

77. (188) Какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается, если отображение осуществляется функцией

1) $w = z^2$; 2) $w = z^2 + 2z$; 3) $w = \dfrac{1}{z}$;
4) $w = e^z$; 5) $w = \ln(z - 1)$.

78. (189) Область G отображается с помощью функции $f(z)$ конформно и взаимно однозначно на область G'. Указать формулы для вычисления площади S и области G' и длины L дуги, на которую отображается некоторая дуга l, принадлежащая области G.

79. (190) Найти длину L спирали, на которую с помощью функции e^z отображается отрезок $y = x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

80. (191) Найти площадь области, на которую с помощью функции e^z отображается прямоугольник $1 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 4$.

81. (192) Найти область D на которую функция e^z отображает прямоугольник $1 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 8$. Вычислить площадь области D с помощью формулы, полученной при решении задачи **78**, и объяснить, почему эта формула дает неправильный результат.

§ 5. Интегрирование функций комплексного переменного

82. (388) Вычислить интегралы $I_1 = \displaystyle\int x\,dz$, $I_2 = \displaystyle\int y\,dz$ по следующим путям:

1) по радиусу-вектору точки $z = 2 + i$;
2) по полуокружности $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$ (начало пути в точке $z = 1$);
3) по окружности $|z - a| = R$.

83. (389) Вычислить интеграл $\int |z|\, dz$ по следующим путям:
1) по радиусу-вектору точки $z = 2 - i$;
2) по полуокружности $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$ (начало пути в точке $z = 1$);
3) по полуокружности $|z| = 1$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}$ (начало пути в точке $z = -i$);
4) по окружности $|z| = R$.

84. (390) Вычислить интеграл $\int_C |z|\overline{z}\, dz$, где C – замкнутый контур, состоящий из верхней полуокружности $|z| = 1$ и отрезка $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $y = 0$.

85. (391) Вычислить интеграл $\int_C \frac{z}{\overline{z}}\, dz$, где C – граница полукольца, изображенного на рис. 1.

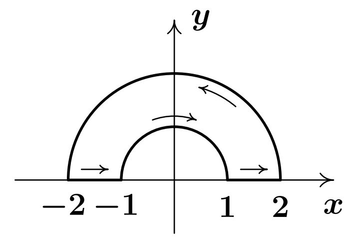

Рис. 1

86. (392) Вычислить интеграл $\int (z - a)^n\, dz$ (n – целое число):

1) по полуокружности $|z - a| = R$, $0 \leqslant \arg(z - a) \leqslant \pi$ (начало пути в точке $z = a + R$);

2) по окружности $|z - a| = R$;

3) по периметру квадрата с центром в точке a и сторонами, параллельными осям координат.

§ 6. Интегральная формула Коши

Всюду в задачах этого параграфа C означает простой замкнутый спрямляемый контур.

87. (412) Вычислить интеграл $\int_C \frac{dz}{z^2 + 9}$, если:
1) точка $3i$ лежит внутри контура C, а точка $-3i$ – вне его;
2) точка $-3i$ лежит внутри контура C, а точка $3i$ – вне его;
3) точки $\pm 3i$ лежат внутри контура C.

88. (413) Вычислить все возможные значения интеграла $\int_C \frac{dz}{z(z^2 - 1)}$ при различных положениях контура C. Предполагается, что контур C не проходит ни через одну из точек 0, 1 и -1.

89. (414) Какое число различных значений может принимать интеграл $\int_C \frac{dz}{\omega_n(z)}$, где $\omega_n(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$, $(z_i \neq z_j)$ и контур C не проходит ни через одну из точек z_i.

90. (415) Вычислить интеграл $\int_{|z-a|=a} \frac{z\, dz}{(z^4 - 1)}$, $a > 1$.

91. (416) Вычислить интеграл $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \dfrac{e^z\,dz}{(z^2+a^2)}$, если контур C содержит внутри себя круг $|z| \leqslant a$.

92. (417) Вычислить интеграл $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \dfrac{ze^z\,dz}{(z-a)^3}$, если точка a лежит внутри контура C.

Указание. Воспользоваться формулами для производных интеграла Коши.

93. (418) Вычислить интеграл $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \dfrac{e^z\,dz}{z(1-z)^3}$, если:

1) точка 0 лежит внутри, а точка 1 вне контура C;
2) точка 1 лежит внутри, а точка 0 вне контура C;
3) точки 0 и 1 обе лежат внутри контура C.

94. (421) Согласно теореме Лиувилля, функция $f(z)$, аналитическая и ограниченная во всей плоскости, является постоянной. Доказать эту теорему, вычислив интеграл $\displaystyle\int_{|z|=R} \dfrac{f(z)\,dz}{(z-a)(z-b)}$ ($|a| < R$, $|b| < R$) и произведя его оценку при $R \to \infty$.

95. (422) Пусть $f(z)$ аналитична в замкнутой области, ограниченной контуром C, z_1, z_2, ..., z_n – различные произвольные точки внутри C и $\omega_n(z) = (z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)$. Показать, что интеграл

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\omega_n(\zeta)}\frac{\omega_n(\zeta)-\omega_n(z)}{\zeta - z}d\zeta$$

есть многочлен $(n-1)$-й степени, совпадающий с $f(z)$ в точках z_1, z_2, ..., z_n (многочлен $P(z)$ называется интерполяционным многочленом Лагранжа).

§ 7. Степенные ряды

В задачах **96–106** определить радиусы сходимости рядов.

96. (425) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$.

97. (426) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$.

98. (427) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$.

99. (428) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n} z^n$.

100. (429) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n} z^n$.

101. (430) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$.

102. (431) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{n!}$.

103. (432) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$.

104. (433) $\sum_{n=1}^{\infty} [3+(-1)^n]^n z^n$.

105. (434) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos in \cdot z^n$.

106. (435) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+a^n) z^n$.

§ 8. Ряд Тейлора

В задачах **107–115** указанные функции разложить в степенной ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ и найти радиус сходимости.

107. (452) $\operatorname{ch} z$. **108.** (453) $\operatorname{sh} z$. **109.** (454) $\sin^2 z$.

110. (455) $\operatorname{ch}^2 z$. **111.** (458) $\dfrac{1}{az+b}$, $(b \neq 0)$.

112. (459) $\dfrac{z}{z^2-4z+13}$. **113.** (460) $\dfrac{z^2}{(z+1)^2}$.

114. (465) $\displaystyle\int_0^z e^{z^2}\,dz$. **115.** (466) $\displaystyle\int_0^z \frac{\sin z}{z}\,dz$.

В задачах **116–119** указанные функции разложить в ряд по степеням $(z-1)$ и найти радиус сходимости.

116. (467) $\dfrac{z}{z+2}$. **117.** (468) $\dfrac{z}{z^2-2z+5}$.

118. (469) $\dfrac{z^2}{(z+1)^2}$. **119.** (472) $\sin(2z-z^2)$.

120. (473) Найти первые 5 членов разложения в ряд по степеням z функции $e^{z\sin z}$.

§ 9. Нули аналитических функций

121. (504) Доказать, что точка z_0 тогда и только тогда является нулем порядка k аналитической функции $f(z)$, когда в некоторой окрестности точки z_0 имеет место равенство $f(z)=(z-z_0)^k\varphi(z)$, где функция $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0$.

122. (505) Найти порядок нуля $z=0$ для функций
1) $z^2(e^{z^2}-1)$; 2) $6\sin z^3 + z^3(z^6-6)$; 3) $e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}$.

123. (506) Точка z_0 является нулем порядка k функции $f(z)$ и нулем порядка l для функции $\varphi(z)$. Чем является точка z_0 для следующих функций:

1) $f(z)\varphi(z)$; 2) $f(x)+\varphi(z)$; 3) $\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$?

В задачах **124–136** найти порядки всех нулей данных функций.

124. (507) z^2+9. **125.** (508) $\dfrac{z^2+9}{z^4}$.

126. (509) $z\sin z$. **127.** (510) $(1-e^z)(z^2-4)^3$.

128. (511) $1-\cos z$. **129.** (512) $\dfrac{(z^2-\pi^2)^2\sin z}{z^7}$.

130. (513) $\dfrac{1-\operatorname{ctg} z}{z}$. **131.** (514) $e^{\operatorname{tg} z}$.

132. (515) $\sin^3 z$. **133.** (516) $\dfrac{\sin^3 z}{z}$.

134. (517) $\sin z^3$. **135.** (518) $\cos^3 z$.

136. (519) $\cos z^3$.

§ 10. Ряд Лорана

В задачах 137–148 данную функцию разложить в ряд Лорана либо в указанном кольце, либо в окрестности указанной точки. В последнем случае надлежит определить область, в которой разложение имеет место.

137. (543) $\dfrac{1}{z-2}$ в окрестности точек $z=0$ и $z=\infty$.

138. (544) $\dfrac{1}{(z-a)^k}$ ($a \neq 0$, k – натуральное число) в окрестности точек $z=0$ и $z=\infty$.

139. (545) $\dfrac{1}{z(1-z)}$ в окрестности точек $z=0$, $z=1$, $z=\infty$.

140. (546) $\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ ($0<|a|<|b|$) в окрестности точек $z=0$, $z=a$, $z=\infty$ и в кольце $|a|<|z|<|b|$.

141. (547) $\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ в окрестности точки $z=2$ и в кольце $1<|z|<2$.

142. (548) $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ в окрестности точек $z=i$ и $z=\infty$.

143. (551) $z^2 e^{\frac{1}{z}}$ в окрестности точек $z=0$ и $z=\infty$.

144. (552) $e^{\frac{1}{1-z}}$ в окрестности точек $z=1$ и $z=\infty$.

145. (553) $\cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$ в окрестности точки $z=2$.

146. (554) $z^2\sin\dfrac{1}{z-1}$ в окрестности точки $z=1$.

147. (555) $e^{z+\frac{1}{z}}$ в области $0<|z|<\infty$.

148. (556) $\sin z \sin\dfrac{1}{z}$ в области $0<|z|<\infty$.

149. (557) $\sin\dfrac{z}{1-z}$ в окрестности точек $z=1$ и $z=\infty$ (в последнем случае ограничиться четырьмя первыми членами ряда).

150. (561) Выяснить, допускают ли указанные функции разложение в ряд Лорана в окрестности данной точки:

1) $\cos\dfrac{1}{z}$, $z=0$; 2) $\cos\dfrac{1}{z}$, $z=\infty$; 3) $\sec\dfrac{1}{z-1}$, $z=1$;

4) $\operatorname{ctg} z$, $z=\infty$; 5) $\operatorname{th}\dfrac{1}{z}$, $z=0$; 6) $\dfrac{z^2}{\sin\frac{1}{z}}$, $z=0$.

§ 11. Особые точки однозначных аналитических функций

В задачах 151–186 найти особые точки функций, выяснить их характер и исследовать поведение функции на бесконечности.

151. (565) $\dfrac{1}{z-z^3}$.

152. (566) $\dfrac{z^4}{1+z^4}$.

153. (567) $\dfrac{z^5}{(1-z)^2}$.

154. (568) $\dfrac{1}{z(z^2+4)^2}$.

155. (569) $\dfrac{e^z}{1+z^2}$.

156. (570) $\dfrac{z^2+1}{e^z}$.

157. (571) ze^{-z}.

158. (572) $\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$.

159. (573) $\dfrac{e^z}{z(1-e^{-z})}$.

160. (574) $\dfrac{1-e^z}{2+e^z}$.

161. (575) $\dfrac{1}{z^3(2-\cos z)}$.

162. (576) $\operatorname{th} z$.

163. (577) $e^{-\frac{1}{z^2}}$.

164. (578) $ze^{\frac{1}{z}}$.

165. (579) $e^{\frac{z}{1-z}}$.

166. (580) $e^{z-\frac{1}{z}}$.

167. (581) $\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}$.

168. (582) $\dfrac{1}{\sin z}$.

169. (583) $\dfrac{\cos z}{z^2}$.

170. (584) $\operatorname{tg} z$.

171. (585) $\operatorname{tg}^2 z$.

172. (586) $\dfrac{\operatorname{ctg} z}{z^2}$.

173. (587) $\operatorname{ctg} z-\dfrac{1}{z}$.

174. (588) $\operatorname{ctg} z-\dfrac{2}{z}$.

175. (589) $\dfrac{1}{\sin z-\sin a}$.

176. (590) $\dfrac{1}{\cos z+\cos a}$.

177. (591) $\sin\dfrac{1}{1-z}$.

178. (592) $\dfrac{z^7}{(z^2-4)^2\cos\frac{1}{z-2}}$.

179. (593) $\operatorname{ctg}\dfrac{1}{z}$.

180. (594) $\operatorname{ctg}\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z}$.

181. (595) $\sin\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}$.

182. (596) $e^{-z}\cos\dfrac{1}{z}$.

183. (597) $e^{\operatorname{ctg}\frac{1}{z}}$.

184. (598) $e^{\operatorname{tg}\frac{1}{z}}$.

185. (599) $\sin\left(\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}\right)$.

186. (600) $\sin\left(\dfrac{1}{\cos\frac{1}{z}}\right)$.

§ 12. Вычисление вычетов

В задачах 187–205 требуется найти вычеты указанных функций относительно всех изолированных особых точек и относительно бесконечно удаленной точки (если она не является предельной точкой для особых точек).

187. (621) $\dfrac{1}{z^3-z^5}$.

188. (622) $\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$.

189. (623) $\dfrac{z^{2n}}{(1+z)^n}$ (n – натуральное число).

190. (624) $\dfrac{1}{z(1-z^2)}$.

191. (625) $\dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$.

192. (626) $\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$.

193. (627) $\dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}$.

194. (628) $\operatorname{tg} z$.

195. (629) $\dfrac{1}{\sin z}$.

196. (630) $\operatorname{ctg}^2 z$.

197. (631) $\operatorname{ctg}^3 z$.

198. (632) 1) $\cos\dfrac{1}{z-2}$; 2) $z^3\cos\dfrac{1}{z-2}$.

199. (633) $e^{z+\frac{1}{z}}$.

200. (634) $\sin z \sin \dfrac{1}{z}$.

201. (635) $\sin \dfrac{z}{z+1}$.

202. (636) $\cos \dfrac{z^2+4z-1}{z+3}$.

203. (637) $\dfrac{1}{z(1-e^{-hz})}$ $(h \neq 0)$.

204. (638) $z^n \sin \dfrac{1}{z}$ (n – целое число).

205. (639) $\dfrac{1}{\sin \frac{1}{z}}$.

§ 13. Вычисление интегралов

Непосредственное применение теоремы о вычетах

В задачах 149–152 вычислить интегралы, считая, что обход замкнутых контуров происходит в положительном направлении.

206. (657) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z^4+1}$, где C – окружность $x^2+y^2=2x$.

207. (658) $\displaystyle\int_C \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$, где C – окружность $|z-2| = \dfrac{1}{2}$.

208. (659) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$, где C – окружность $|z|=2$.

Указание. Воспользоваться тем, что сумма вычетов относительно всех особых точек (включая бесконечно удаленную) равна нулю.

209. (660) $\displaystyle\int_C \frac{z^3\,dz}{2z^4+1}$, где C – окружность $|z|=1$.

210. (661) $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z^2(z^2-9)}\,dz$, где C – окружность $|z|=1$.

211. (662) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C \sin\frac{1}{z}\,dz$, где C – окружность $|z|=r$.

212. (663) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C \sin^2\frac{1}{z}\,dz$, где C – окружность $|z|=r$.

213. (664) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C z^n e^{\frac{2}{z}}\,dz$, где n – целое число, а C – окружность $|z|=r$.

214. (665) $\displaystyle\int_{|z|=3} (1+z+z^2)\left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}}\right)dz$.

215. (666) $\displaystyle\int_{|z|=5} \frac{z\,dz}{\sin z(1-\cos z)}$.

216. (673) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}$ $(a>1)$.

Указание. Положить $e^{i\varphi}=z$.

217. (674) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}$ $(a>b>0)$.

218. (675) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a+b\cos^2\varphi)^2}$ $(a>0,\ b>0)$.

219. (676) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$ (a – комплексное число и $a\neq\pm1$).

220. (677) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\varphi\,d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$ (a – комплексное число и $a\neq\pm1$).

221. (678) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi}\cos(n\varphi-\sin\varphi)\,d\varphi$ (n – целое число).

222. (679) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{tg}(x+ia)\,dx$ (a – действительное число).

223. (680) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}(x+a)\,dx$ (a – комплексное число и $\Im m\, a\neq 0$).

В задачах 224–230 вычислить интегралы с бесконечными пределами.

224. (682) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}$.

225. (683) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}$ $(a>0)$.

226. (684) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ (n – натуральное число).

227. (685) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a>0,\ b>0)$.

228. (686) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$.

229. (687) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n}$ ($n\geq 2$ – натуральное число).

Указание. Рассмотреть интеграл $\displaystyle\int_C \frac{dz}{1+z^n}$, где C – контур, состоящий из лучей $\arg z=\dfrac{2\pi}{n}$ и соединяющей их дуги окружности.

230. (688) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,dx$ $(n\geq 2)$.

Примечание. Метод вычисления интегралов из задач 229 и 230 переносится на интегралы от рациональных функций вида $\boldsymbol{R(x^n)}$.

В задачах 231–234, пользуясь леммой Жордана, вычислить указанные интегралы.

231. (691) 1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x \, dx}{x^2 - 2x + 10}$; 2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x \, dx}{x^2 - 2x + 10}$.

232. (692) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x \, dx}{x^2 + 4x + 20}$.

233. (693) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} \, dx$ (a и b – положительные числа).

234. (694) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} \, dx$ (a и b – положительные числа).

Ответы и решения

1. 1) $-i$; 2) $-i$; 3) $\frac{1}{5}(1+3i)$; 4) -8. **2.** 1) 3, $\frac{\pi}{2}$ (здесь и дальше указаны только значения $\arg z$); 2) 2, π; 3) $\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{4}$; 4) $\sqrt{2}$, $-\frac{3\pi}{4}$; 5) $\sqrt{29}$, $\operatorname{arctg}\frac{5}{2}$; 6) $\sqrt{29}$, $-\operatorname{arctg}\frac{5}{2}$; 7) $\sqrt{29}$, $\pi-\operatorname{arctg}\frac{5}{2}$; 8) $\sqrt{29}$, $\operatorname{arctg}\frac{5}{2}-\pi$; 9) $|b|$, $\frac{\pi}{2}\frac{|b|}{b}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} b$; 10) $\sqrt{a^2+b^2}$, $\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ при $a>0$, $\operatorname{arctg}\frac{b}{a}+\pi$ при $a<0$ и $b\geqslant 0$, $\operatorname{arctg}\frac{b}{a}-\pi$ при $a<0$ и $b<0$.
3. $z=\cos\varphi_k+i\sin\varphi_k$, где $\varphi_k=\frac{2\pi k}{n}$, k=0, 1, …, $n-1$; $z=0$. **4.** 1) 1, $-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$; 2) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$, $-i$; 3) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$; 4) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-i)$, $\pm\sqrt{2}i$; 5) $\pm1\pm i$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$; 6) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{\sqrt{2}+1}-i\sqrt{\sqrt{2}-1})$; 7) $\pm(2+i)$; 8) $\sqrt{2}\left[\cos\frac{\left(2k+\frac{3}{4}\right)\pi}{3}+i\sin\frac{\left(2k+\frac{3}{4}\right)\pi}{3}\right]$ $(k=0,1,2)$. 9) $\sqrt[5]{5}\times\left[\cos\frac{(2k+1)\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}}{5}+i\sin\frac{(2k+1)\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}}{5}\right]$ $(k=0,1,2,3,4)$.
9. $z_k=z_1\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$. **10.** $z_3=z_2+(z_2-z_1)\left(\cos\frac{2\pi}{n}\pm i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$. **11.** $z_4=z_1+z_3-z_2$. **12.** Внутренность круга радиуса R с центром в точке $z=z_0$; внешность этого же круга; окружность того же круга.
13. Эллипс с фокусами в точках $z=\pm2$ и большой полуосью $\frac{5}{2}$. **14.** Внутренность левой ветви гиперболы с фокусами в точках $z=\pm2$ и действительной полуосью $\frac{3}{2}$.
15. Прямая, перпендикулярная к отрезку, соединяющему точки z_1 и z_2, и проходящая через середину этого отрезка. **16.** 1) Прямая $x=C$ и полуплоскость, расположенная справа от нее; 2) полуплоскость, расположенная снизу от прямой $y=C$. **17.** Полоса $-1<y<0$. **18.** Внутренность угла (содержащая положительную часть действительной оси) с вершиной в начале координат и сторонами, образующими с действительной осью углы, равные соответственно α и β; внутренность такого же угла с вершиной в точке z_0. **19.** Парабола $y^2=2x+1$. **20.** Полуплоскость, ограниченная прямой $x+y=1$ и содержащая начало координат. **21.** 1) Семейство окружностей, касающихся в начале координат мнимой оси, и сама мнимая ось (уравнение семейства: $C(x^2+y^2)=x$); 2) семейство окружностей, касающихся в начале координат действительной оси, и сама действительная ось. **22.** 1) Семейство гипербол $x^2-y^2=C$; 2) семейство гипербол $xy=\frac{C}{2}$. **23.** $\xi=\frac{x}{x^2+y^2+1}$, $\eta=\frac{y}{x^2+y^2+1}$, $\zeta=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}$, $z=x+iy=\frac{\xi+i\eta}{1-\zeta}$. **24.** $\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$, $\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2}\right)$. Все че-

тыре точки лежат на экваторе, долготы их соответственно равны 0, π, $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{4}$ (долгота отсчитывается от начального меридиана, лежащего в плоскости ξ, η). **25.** Окружность радиуса $\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ с центром в точке $z=0$. „Южному“ полюсу соответствует начало координат, „северному“ – бесконечно удаленная точка. **26.** 1) Полумеридианы с долготой α; 2) параллели с широтой $\beta = 2\operatorname{arctg} r - \frac{\pi}{2}$. **27.** 1) Диаметрально противоположные точки на одной параллели; 2) точки, взаимно симметричные относительно начального меридиана (т.е. с отличающимися по знаку долготами); 3) точки, взаимно симметричные относительно плоскости экватора (т.е. с одинаковой долготой и с широтами, отличающимися знаком). **28.** $z_1 \cdot \bar{z}_2 = -1$. **29.** 1) Восточное полушарие; 2) западное полушарие; 3) полушарие $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (α – долгота); 4) полушарие $\frac{\pi}{2} < |\alpha| < \pi$; 5) южное полушарие; 6) северное полушарие.

30. 1, $e^{\pi i}$, $e^{\frac{\pi}{2}i}$, $e^{-\frac{\pi}{2}i}$, $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$, $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$, $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$, $\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$. **31.** $\pm i$; $(-1)^k$. **32.** e^2, 1; e^2, -3; e^3, $4-2\pi$; e^{-3}, $2\pi-4$; a, $\varphi-\pi$, если $\varphi \leqslant 0$; 1, $-\varphi$, если $|\varphi| < \pi$, и π, если $|\varphi| = \pi$; $2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\frac{\alpha+\beta+\pi}{2}$, если $\alpha+\beta \leqslant \pi$ и $\frac{\alpha+\beta-3\pi}{2}$, если $\alpha+\beta > \pi$. **33.** 1) $\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$; 2) $\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$; 3) $\frac{\sin 2nx}{2\sin x}$; 4) $\frac{\sin^2 nx}{\sin x}$; 5) $\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$, если n – нечетное число, $-\frac{\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$, если n – четное число. **34.** 1) $\frac{\sin\frac{n+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}} \times \cos\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)$; 2) $\frac{\sin\frac{n+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}\sin\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)$. **37.** 1) $\ln 4 + 2k\pi i$, $(2k+1)\pi i$, πi; 2) $\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi i$; $\frac{\pi i}{2}$; 3) $\left(2k \pm \frac{1}{4}\right)\pi i$; 4) $\frac{1}{2}\ln 13 + \left(2k\pi - \operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right)i$, $\frac{1}{2}\ln 13 + \left[(2k+1)\pi - \operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right]i$. **38.** 1) $\cos(2k\sqrt{2}\pi) + i\sin(2k\sqrt{2}\pi)$; 2) $2^{\sqrt{2}}[\cos(2k+1)\pi\sqrt{2} + i\sin(2k+1)\pi\sqrt{2}]$; 3) $e^{2k\pi}(\cos\ln 2 + i\sin\ln 2)$; 4) $e^{2k\pi}$; 5) $e^{\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi}$; 6) $\frac{1-i}{\sqrt{2}}e^{\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi}$; 7) $5e^{\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+2k\pi}[\cos(\ln 5 - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}) + i\sin(\ln 5 - \operatorname{arctg}\frac{4}{3})]$; 8) $-5e^{\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+(2k+1)\pi}[\cos(\ln 5 - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}) + i\sin(\ln 5 - \operatorname{arctg}\frac{4}{3})]$. Везде k – целое число ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). **40.** Множества значений $a^{2\alpha}$ и $(a^\alpha)^2$ совпадают между собой, но не совпадают, вообще говоря, с множеством значений $(a^2)^\alpha$. **42.** 1) $\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $\frac{5\pi}{6}+2k\pi$; 2) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$; 3) $2k\pi \pm i\ln(2+\sqrt{3})$; 4) $2k\pi - i\ln(\sqrt{2}-1)$, $(2k+1)\pi - i\ln(\sqrt{2}+1)$; 5) $\frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + (2k+1)\pi\right] + \frac{i}{4}\ln 5$; 6) $\ln(\sqrt{5}\pm 2) + \left(2k \pm \frac{1}{2}\right)\pi i$; 7) $\frac{1}{4}\ln 5 + \left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + (k+\frac{1}{2})\pi\right]i$. Всюду k – целое число ($k = 0$,

$\pm 1, \pm 2, \ldots$). **43.** 1) $z = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi - i\ln(\sqrt{2} \pm 1)$; 2) $z = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi - i\ln\left(\dfrac{3 \pm \sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)$; 3) $z = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi - i\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)$ и $z = -\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi - i\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)$; 4) $z = 2k\pi i$; 5) $z = -\ln 2 + (2k+1)\pi i$; 6) $z = \left(2k + \dfrac{1}{2}\right)\pi i$ и $z = -\ln 3 + \left(2k - \dfrac{1}{2}\right)\pi i$. Всюду k – целое число. **44.** 1) $z = k\pi(1 \pm i)$; 2) $z = k\pi(1+i)$ и $z = \dfrac{(2k+1)\pi}{1+i}$; 3) $z = \dfrac{(4k+1)\pi}{2(1+2i)}$ и $z = \dfrac{(4k-1)\pi}{2(1-2i)}$. Всюду k – целое число.

45. Отрезок прямой : $x = 1$, $-2 \leqslant y \leqslant 0$. **46.** Парабола $y = x^2$. **47.** Дважды пробегаемая правая половина параболы $y = x^2$. **48.** Левая полуокружность радиуса a с центром в точке $z = 0$. **49.** Ветвь гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$, лежащая в третьем квадранте. **50.** 1) Образами прямых $x = C$ являются при $C \neq 0$ параболы $u = C^2 - \dfrac{v^2}{4C^2}$, при $C = 0$ полуось $v = 0$, $u \leqslant 0$; образами прямых $y = C$ являются при $C \neq 0$ параболы $u = \dfrac{v^2}{4C^2} - C^2$, при $C = 0$ полуось $v = 0$, $u \geqslant 0$; образом прямой $x = y$ является полуось $u = 0$, $v \geqslant 0$; образами окружностей $|z| = R$ являются окружности $|w| = R^2$; образами лучей $\arg z = \alpha$ – лучи $\arg w = 2\alpha$; взаимно однозначно отображаются прямые $x = C$, $y = C$, при $C \neq 0$ и лучи $\arg z = \alpha$; 2) прообразами прямых $u = C$ являются гиперболы $x^2 - y^2 = C$ (при $C = 0$ – пара прямых), прообразами прямых $v = C$ – гиперболы $xy = \dfrac{C}{2}$ (при $C = 0$ – пара прямых). **51.** 1) Образами прямых $x = C$ являются окружности $u^2 + v^2 - \dfrac{u}{C} = 0$, при $C = 0$ – ось $u = 0$; образами прямых $y = C$ являются окружности $u^2 + v^2 + \dfrac{v}{C} = 0$, при $C = 0$ – ось $v = 0$; образами окружностей $|z| = R$ являются окружности $|w| = \dfrac{1}{R}$; образами лучей $\arg z = \alpha$ являются лучи $\arg w = -\alpha$; образом окружности $|z - 1| = 1$ является прямая $u = \dfrac{1}{2}$; 2) прообразами прямых $u = C$ являются окружности $x^2 + y^2 - \dfrac{x}{C} = 0$, при $C = 0$ — ось $x = 0$, прообразами прямых $v = C$ — окружности $x^2 + y^2 + \dfrac{y}{C} = 0$, при $C = 0$ — ось $y = 0$. **52.** Функция $w = z + \dfrac{1}{z}$ отображает окружности $|z| = R \neq 1$ на эллипсы $\dfrac{u^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} + \dfrac{v^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} = 1$, а окружность $|z| = 1$ на отрезок $v = 0$, $-2 \leqslant u \leqslant 2$; функция $w = z - \dfrac{1}{z}$ отображает окружности $|z| = R \neq 1$ на эллипсы $\dfrac{u^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} + \dfrac{v^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} = 1$, а окружность $|z| = 1$ на отрезок $u = 0$, $-2 \leqslant v \leqslant 2$. **53.** Прообразом семейства $u = C$ является семейство $x(x^2 + y^2 + 1) = C(x^2 + y^2)$;

прообразом семейства $v = C$ – семейство $y(x^2+y^2-1) = C(x^2+y^2)$. **54.** В луч, идущий по отрицательной части действительной оси из точки $w = -\dfrac{1}{4}$ в точку $w = \infty$. **55.** 1) Окружности $\rho = e^C$, лучи $\theta = C$, спираль $\rho = e^{\theta}$; 2) линии $y = e^x + 2k\pi$. **??.** Только $f(z) = \dfrac{2\Re e\, z}{|z|}$ $f(0) = 0$. **??.** 1) и 2) Непрерывны, но не равномерно. **??.** 2) Нет; 3) да.

57. 1) $c = 1$, $b = -a$; $f(z) = (1-ai)z$; 2) $a = b = -1$; $f(z) = e^{iz}$. **58.** Функция аналитическая при $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$, $\pi < \arg z < \dfrac{5\pi}{4}$ $(f(z) = z^2)$ и при $\dfrac{\pi}{2} < \arg z < \dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{2} < \arg z < \dfrac{7\pi}{4}$ $(f(z) = -z^2)$. **60.** $r\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial v}{\partial \varphi}$, $\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = -r\dfrac{\partial v}{\partial r}$. **62.** 0. Всюду в номерах **65–71** C — произвольная действительная постоянная. **65.** $v(x,y) = 2xy + y + C$. **66.** $v(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2} + C$. **67.** а) $v(x,y) = \arg z + C$; б) $v(x,y) = \arg z + 2m\pi + C$. **68.** $f(z) = z^2 + (5-i)z - \dfrac{i}{z} + Ci$. **69.** $f(z) = ze^z + 2i\cos z + z^3 - iz + Ci$. **70.** $f(z) = \dfrac{1}{2z} + iz^2 + 3i + C$. **71.** $f(z) = 2i\ln z - (2-i)z + C$. **72.** $f(z) = e^{i\alpha}z^2e^z$. **73.** $f(z) = e^{i\alpha}e^{z^2}$. **74.** $f(z) = Ae^{\frac{z^2}{2}}$. **75.** $f(z) = Aze^z$. (α – произвольная действительная постоянная, A – произвольная положительная постоянная). **76.** Для $w = z^2$: 1) $\vartheta = 0$, $k = 2$; 2) $\vartheta = \pi$, $k = \dfrac{1}{2}$; 3) $\vartheta = \dfrac{\pi}{4}$, $k = 2\sqrt{2}$; 4) $\vartheta = \pi - \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$, $k = 10$. Для $w = z^3$: 1) $\vartheta = 0$, $k = 3$; 2) $\vartheta = 0$, $k = \dfrac{3}{16}$; 3) $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$, $k = 6$; 4) $\vartheta = -2\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$, $k = 75$. **77.** 1) Сжатие при $|z| < \dfrac{1}{2}$, растяжение при $|z| > \dfrac{1}{2}$; 2) сжатие при $|z+1| < \dfrac{1}{2}$, растяжение при $|z+1| > \dfrac{1}{2}$; 3) сжатие при $|z| > 1$, растяжение при $|z| < 1$; 4) сжатие при $\Re e\, z < 0$, растяжение при $\Re e\, z > 0$; 5) сжатие при $|z-1| > 1$, растяжение при $|z-1| < 1$. **78.** $S = \displaystyle\iint_G |f'(z)|^2\,dxdy$, $L = \displaystyle\int_l |f'(z)|\,ds$. **79.** $\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)$. **81.** Областью D является кольцо $e \leqslant |w| \leqslant e^2$. Формулу из задачи **78** применять нельзя, так как отображение не является взаимно однозначным.

82. 1) $I_1 = 2 + i$, $I_2 = 1 + \dfrac{i}{2}$; 2) $I_1 = \dfrac{i\pi}{2}$, $I_2 = -\dfrac{\pi}{2}$; 3) $I_1 = i\pi R^2$, $I_2 = -\pi R^2$. **83.** 1) $\sqrt{5}\left(1 - \dfrac{i}{2}\right)$; 2) -2; 3) $2i$; 4) 0. **84.** πi. **85.** $\dfrac{3}{4}$. **86.** 1) $\dfrac{R^{n+1}}{n+1}[(-1)^{n+1} - 1]$, если $n \neq -1$; πi, если $n = -1$; 2) и 3) 0, если $n \neq -1$; $2\pi i$, если $n = -1$.

87. 1) $\dfrac{\pi}{3}$; 2) $-\dfrac{\pi}{3}$; 3) 0. **88.** Если контур C содержит внутри себя точку 0 и не содержит 1 и -1, то $I = -2\pi i$; если содержит только одну из точек -1 или 1 и не содержит точку 0, то $I = \pi i$. Отсюда ясно, что интеграл может принимать пять различных значений $(-2\pi i;\ -\pi i;\ 0;\ \pi i;\ 2\pi i)$. **89.** $2^n - 1$, если $n > 1$; 2, если $n = 1$. **90.** $\dfrac{\pi i}{2}$. **91.** $\dfrac{\sin a}{a}$. **92.** $e^a\left(1 + \dfrac{a}{2}\right)$. **93.** 1) 1; 2) $-\dfrac{e}{2}$; 3) $1 - \dfrac{e}{2}$.

96. $R = 1$. **97.** ∞. **98.** 0. **99.** 2. **100.** e. **101.** 1. **102.** 1. **103.** 1. **104.** $\dfrac{1}{4}$. **105.** $\dfrac{1}{e}$. **106.** 1, если $|a| \leqslant 1$; $\dfrac{1}{|a|}$, если $|a| > 1$.

107. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$. **108.** $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$.
109. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$.
110. $\dfrac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$. **111.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{a^n z^n}{b^{n+1}}$, $R = \left|\dfrac{b}{a}\right|$.
112. $\dfrac{i}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2-3i)^n - (2+3i)^n}{13^n} z^n$, $R = \sqrt{13}$.
113. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (n-1) z^n$, $R = 1$. **114.** $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n+1}}{n!(2n+1)}$, $R = \infty$.
115. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$, $R = \infty$.
116. $\dfrac{1}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{(z-1)^n}{3^{n+1}}$, $R = 3$.
117. $\dfrac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^{2n}} \left[(z-1)^{2n} + (z-1)^{2n+1}\right]$, $R = 2$.
118. $\dfrac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(n-3)(z-1)^n}{2^{n+2}}$, $R = 2$.
119. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sin\left(1 + \dfrac{n\pi}{2}\right)}{n!} (z-1)^{2n}$, $R = \infty$.
120. $1 + z^2 + \dfrac{z^4}{3} + \ldots$.

122. 1) 4; 2) 15; 3) 3. **123.** 1) Нулем порядка $k + l$; 2) нулем, порядок которого не ниже, чем $\min(k, l)$; 3) нулем порядка $k - l$, если $k > l$; правильной точкой, не являющейся нулем, если $k = l$, и особой точкой, если $k < l$. **124.** Точки $z = \pm 3i$ – нули 1-го порядка. **125.** Точки $z = \pm 3i$ – нули 1-го порядка; бесконечно удаленная точка – нуль 2-го порядка. **126.** $z = 0$ – нуль 2-го порядка; $z = k\pi$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ – нули 1-го порядка. **127.** $z = \pm 2$ – нули 3-го порядка; $z = 2k\pi i$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ – нули 1-го порядка. **128.** $z = 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ – нули 2-го порядка. **129.** $z = \pm\pi$ – нули 3-го порядка; все остальные точки вида $z = k\pi$ $(k = 0, \pm 2, \ldots)$ – нули 1-го порядка. **130.** $z = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ – нули 1-го порядка. **131.** Нулей нет. **132.** $z = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ – нули 3-го порядка. **133.** $z = 0$ – нуль 2-го порядка; $z = k\pi$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ – нули 3-го порядка. **134.** $z = 0$ – нуль 3-го порядка; $z = \sqrt[3]{k\pi}$ и $z = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{k\pi}(-1 \pm \sqrt{3})$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ – нули 1-го порядка.

135. $z=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ – нули 3-го порядка. **136.** $z=\sqrt[3]{(2k+1)\frac{\pi}{2}}$ и $z=\frac{1}{2}\sqrt[3]{(2k+1)\frac{\pi}{2}}(-1\pm i\sqrt{3})$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ – нули 1-го порядка.

137. $-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$ при $|z|<2$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$ при $|z|>2$. **138.** $\frac{(-1)^k}{a^k}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}\times\left(\frac{z}{a}\right)^n$ при $|z|<|a|$; $\frac{1}{z^k}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}\left(\frac{a}{z}\right)^n$ при $|z|>|a|$. **139.** $\frac{1}{z}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$ при $|z|<1$; $-\frac{1}{z-1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$ при $0<|z-1|<1$; $-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n}$ при $|z|>1$. **140.** $\frac{1}{b-a}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{a^{n+1}b^{n+1}}z^n$ при $|z|<|a|$; $\frac{1}{a-b}\times\left[\frac{1}{z-a}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}}\right]$ при $0<|z-a|<|b-a|$; $\frac{1}{b-a}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{b^{n-1}-a^{n-1}}{z^n}$ при $|z|>|b|$; $\frac{1}{a-b}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{b^{n+1}}+\frac{a^n}{z^{n+1}}\right)$ при $|a|<|z|<|b|$. **141.** $\frac{1}{z-2}+i\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2+i)^{n+1}-(2-i)^{n+1}}{5^{n+1}}(z-2)^n$ при $0<|z|<\sqrt{5}$; $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$ при $1<|z|<2$. **142.** $-\frac{i}{4(z-i)}-\frac{1}{4(z-i)^2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+3)i^n}{2^{n+4}}\times(z-i)^n$ при $0<|z-i|<2$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{z^{2n+2}}$ при $|z|>1$. **143.** $\frac{1}{2}+z+z^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!z^n}$ при $0<|z|<\infty$. **144.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z-1)^n}$ при $0<|z-1|<\infty$; $1-\frac{1}{z}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}c_{-n}z^{-n}$ при $|z|>1$, где $c_{-n}=-1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\binom{n-1}{k}$ $(n=2,3,\ldots)$. **145.** $\cos 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}4^{2n-1}\sin 1}{(2n-1)!(z-2)^{4n-2}}+\frac{(-1)^n4^{2n}\cos 1}{(2n)!(z-2)^{4n}}\right]$ при $0<|z-2|<\infty$.

146. $(z-1)+2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}\frac{\left[\frac{1}{(2n-1)!}-\frac{1}{(2n+1)!}\right]}{(z-1)^{2n-1}}+\frac{2(-1)^n}{(2n+1)!(z-1)^{2n}}\right]$, при $0<|z-1|<\infty$. **147.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_{-n}z^{-n}$, где $c_n=c_{-n}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(n+k)!}$ $(n=0,1,2,\ldots)$. **148.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_{2n}z^{2n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_{-2n}z^{-2n}$, где $c_{2n}=c_{-2n}=(-1)^n\times\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!(2n+2k+1)!}$ $(n=0,1,2,\ldots)$. **149.** $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(1+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!(z-1)^n}$ при $0<|z-1|<\infty$; $-\sin 1-\frac{\cos 1}{z}+\frac{\sin 1-2\cos 1}{2!z^2}+\frac{6\sin 1-5\cos 1}{3!z^3}+\ldots$ при $|z|>1$.

151. $z=0$, $z=\pm1$ – полюсы **1**-го порядка, $z=\infty$ – правильная точка (нуль **3**-го порядка). **152.** $z=\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}$, $z=\frac{-1\pm i}{\sqrt{2}}$ – полюсы **1**-го порядка, $z=\infty$ – правильная точка. **153.** $z=1$ – полюс 2-го порядка; $z=\infty$ – полюс 3-го порядка. **154.** $z=0$ – полюс 1-го порядка; $z=\pm 2i$ – полюсы 2-го порядка; $z=\infty$ – правильная точка (нуль 5-го порядка). **155.** $z=\pm i$ – полюсы 1-го порядка; $z=\infty$ – существенно особая точка. **156.** $z=\infty$ – существенно особая точка. **157.** $z=\infty$ – существенно особая точка. **158.** $z=2k\pi i$ ($k=\pm 1, 2, \ldots$) – полюсы 1-го порядка; $z=\infty$ – точка, предельная для полюсов. **159.** $z=0$ – полюс 2-го порядка; $z=2k\pi i$ ($k=\pm 1, 2, \ldots$) – полюсы 1-го порядка; $z=\infty$ – точка, предельная для полюсов. **160.** $z=(2k+1)\pi i$ ($k=0, \pm 1, 2, \ldots$) – полюсы 1-го порядка; $z=\infty$ – точка, предельная для полюсов. **161.** $z=0$ – полюс 3-го порядка, $z=2k\pi i\pm i\ln(2+\sqrt{3})$ ($k=0, \pm 1, 2, \ldots$) – полюсы 1-го порядка; $z=\infty$ – точка, предельная для полюсов. **162.** $z=k\pi i$ ($k=0, \pm 1, 2, \ldots$) – полюсы 1-го порядка; $z=\infty$ – точка, предельная для полюсов. **163.** $z=0$ – существенно особая точка; $z=\infty$ – правильная точка. **164.** $z=0$ – существенно особая точка: $z=\infty$ – полюс 1-го порядка. **165.** $z=1$ – существенно особая точка; $z=\infty$ – правильная точка. **166.** $z=0$ – существенно особая точка; $z=\infty$ – существенно особая точка. **167.** $z=1$ – существенно особая точка; $z=2k\pi i$ ($k=0, \pm 1, 2, \ldots$) – полюсы 1-го порядка; $z=\infty$ – точка, предельная для полюсов. **168.** $z=k\pi$ ($k=0, \pm 1, 2, \ldots$) – полюсы 1-го порядка; $z=\infty$ – точка, предельная для полюсов. **169.** $z=0$ – полюс 2-го порядка; $z=\infty$ – существенно особая точка. **170.** $z=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ ($k=0, \pm 1, 2, \ldots$) – полюсы 1-го порядка; $z=\infty$ – точка, предельная для полюсов. **171.** $z=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ ($k=0, \pm 1, 2, \ldots$) – полюсы 2-го порядка; $z=\infty$ – точка, предельная для полюсов. **172.** $z=0$ – полюс 3-го порядка; $z=k\pi$ ($k=\pm 1, 2, \ldots$) – полюсы 1-го порядка; $z=\infty$ – точка, предельная для полюсов. **173.** $z=k\pi$ ($k=\pm 1, 2, \ldots$) – полюсы 1-го порядка; $z=\infty$ – точка, предельная для полюсов. **174.** $z=k\pi$ ($k=0, \pm 1, 2, \ldots$) – полюсы 1-го порядка; $z=\infty$ – точка, предельная для полюсов. **175.** Если $a\neq m\pi+\dfrac{\pi}{2}$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), то $z=2k\pi+a$ и $z=(2k+1)\pi-a$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) – простые полюсы; если $a=m\pi+\dfrac{\pi}{2}$, то при m четном $z=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ и при m нечетном $z=(2k+1)\pi+\dfrac{\pi}{2}$ являются полюсами 2-го порядка; $z=\infty$ – во всех случаях точка, предельная для полюсов. **176.** Если $a\neq m\pi$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), то $z=(2k+1)\pi\pm a$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) – полюсы 1-го порядка; если $a=m\pi$, то при m нечетном $z=2k\pi$, а при m четном $z=(2k+2)\pi$ – полюсы 2-го порядка, $z=\infty$ во всех случаях точка, предельная для полюсов. **177.** $z=1$ – существенно особая точка; $z=\infty$ –правильная точка (нуль 1-го порядка). **178.** $z=-2$ – полюс 2-го порядка; $z=2$ – существенно особая точка; $z=\infty$ – полюс 3-го порядка. **179.** и **180.** $z=\dfrac{1}{k\pi}$ ($k=\pm 1, 2, \ldots$) – полюсы 1-го порядка; $z=0$ – точка, предельная для полюсов, $z=\infty$ – полюс 1-го порядка. **181.** $z=0$ – существенно особая точка; $z=\infty$ – правильная точка (нуль 1-го порядка). **182.** $z=0$ – существенно особая точка; $z=\infty$ – существенно особая точка. **183.** $z=\dfrac{1}{k\pi}$ ($k=\pm 1, 2, \ldots$) – существенно особые точки; $z=0$ – точка, предельная для существенно особых точек, $z=\infty$ – существенно особая точка. **184.** $z=\dfrac{2}{(2k+1)\pi}$ ($k=0, \pm 1, 2, \ldots$) – существенно особые точки; $z=0$ – точка, предельная для существенно особых точек, $z=\infty$ – правильная точка. **185.** $z=\dfrac{1}{k\pi}$ $(k=\pm1,\,2,\,\ldots)$ – существенно особые точки; $z=0$ – точка, предельная для существенно особых точек, $z=\infty$ – существенно особая точка. **186.** $z=\dfrac{2}{(2k+1)\pi}$ $(k=0,\,\pm1,\,2,\,\ldots)$ – существенно особые точки; $z=0$ – точка, предельная для существенно особых точек, $z=\infty$ – правильная точка.

187. $\operatorname*{res}\limits_{z=\pm1} f(z)=-\dfrac{1}{2}$; $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z)=1$; $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=0$. **188.** $\operatorname*{res}\limits_{z=i} f(z)=-\dfrac{i}{4}$; $\operatorname*{res}\limits_{z=-i} f(z)=\dfrac{i}{4}$; $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=0$. **189.** $\operatorname*{res}\limits_{z=-1} f(z)=(-1)^{n+1}\dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$; $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=(-1)^{n}\dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$. **190.** $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z)=1$; $\operatorname*{res}\limits_{z=\pm1} f(z)=-\dfrac{1}{2}$; $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=0$. **191.** $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z)=0$; $\operatorname*{res}\limits_{z=1} f(z)=1$; $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=-1$. **191.** $\operatorname*{res}\limits_{z=-1} f(z)=2\sin2$; $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=-2\sin2$. **193.** $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z)=\dfrac{1}{9}$; $\operatorname*{res}\limits_{z=3i} f(z)=-\dfrac{1}{54}(\sin3-i\cos3)$; $\operatorname*{res}\limits_{z=-3i} f(z)=-\dfrac{1}{54}(\sin3+i\cos3)$; $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=\dfrac{1}{27}\times(\sin3-3)$. **194.** $\operatorname*{res}\limits_{z=\frac{2k+1}{2}\pi} f(z)=-1$ $(k=0,\,\pm1,\,\pm2,\,\ldots)$. **195.** $\operatorname*{res}\limits_{z=k\pi} f(z)=(-1)^k$ $(k=0,\,\pm1,\,\pm2,\,\ldots)$. **196.** $\operatorname*{res}\limits_{z=k\pi} f(z)=0$ $(k=0,\,\pm1,\,\pm2,\,\ldots)$. **197.** $\operatorname*{res}\limits_{z=k\pi} f(z)=-1$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$. **198.** 1) $\operatorname*{res}\limits_{z=2} f(z)=\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=0$; 2) $\operatorname*{res}\limits_{z=2} f(z)=-\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=-\dfrac{143}{24}$. **199.** $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!(n+1)!}=-\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)$. **200.** $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z)=-\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=0$. **201.** $\operatorname*{res}\limits_{z=-1} f(z)=-\cos1=-\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)$. **202.** $\operatorname*{res}\limits_{z=-3} f(z)=-\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=-\sin2\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^{2n}}{(2n-1)!(2n)!}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)!}\right]$. **203.** $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z)=\dfrac{1}{2}$; $\operatorname*{res}\limits_{z=\frac{2k\pi i}{h}} f(z)=\dfrac{1}{2k\pi i}$ $(k=0,\,\pm1,\,\pm2,\,\ldots)$. **204.** $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z)=0$, если $n<0$, а также если $n>0$ – нечетное; $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z)=\dfrac{(-1)^{\frac{1}{2}}}{(n+1)!}$, если $n=0$ или $n>0$ – четное; $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=-\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z)$. **205.** $\operatorname*{res}\limits_{z=\frac{1}{k\pi}} f(z)=(-1)^{k+1}\dfrac{1}{k^2\pi^2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$; $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=\dfrac{2}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^2}=-\dfrac{1}{6}$.

206. $-\dfrac{\pi i}{\sqrt2}$. **207.** $-2\pi i$. **208.** $-\dfrac{\pi i}{121}$. **209.** πi. **210.** $-\dfrac{2\pi i}{9}$. **211.** 1. **212.** 0. **213.** $\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$, если $n\ge-1$, и 0, если $n<-1$. **214.** $32\pi i$. **215.** 0. **216.** $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$. **217.** $\dfrac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}$. **218.** $\dfrac{(2a+b)\pi}{[a(a+b)]^{\frac{3}{2}}}$. **219.** $\dfrac{2\pi}{1-a^2}$, если $|a|<1$; $\dfrac{2\pi}{a^2-1}$, если $|a|>1$; 0 (главное значение), если $|a|=1$, $a\neq\pm1$ (при $a=\pm1$ главное значение не существует). **220.** $\dfrac{\pi(a^6+1)}{1-a^2}$, если $|a|<1$; $\dfrac{\pi(a^6+1)}{a^6(a^2-1)}$, если $|a|>1$; $\dfrac{\pi}{2}\dfrac{(1-a^{12})}{a^6(a^2-1)}$ (главное значение), если $|a|=1$, $a\neq\pm1$ (при $a=\pm1$ главное значение не существует). **221.** $\dfrac{2\pi}{n!}$, если $n\geq 0$; 0, если $n<0$. **222.** $\pi i\,\mathrm{sign}\,a$ (при $a=0$ главное значение интеграла равно 0). **223.** $-2\pi i\,\mathrm{sign}\,\Im m\,a$. **224.** $\dfrac{-\pi}{27}$. **225.** $\dfrac{\pi}{4a}$. **226.** $\dfrac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n-2)}\dfrac{\pi}{2}$, если $n>1$; $\dfrac{\pi}{2}$, если $n=1$. **227.** $\dfrac{\pi}{ab(a+b)}$. **228.** $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$. **229.** $\dfrac{\pi}{n\sin\dfrac{\pi}{n}}$. **230.** $\dfrac{\pi}{n}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{n}}$. **231.** 1) $\dfrac{\pi}{3e^3}(\cos 1-3\sin 1)$; 2) $\dfrac{\pi}{3e^3}(3\cos 1+\sin 1)$. **232.** $\dfrac{\pi}{2e^4}(2\cos 2+\sin 2)$. **233.** $\dfrac{\pi e^{-ab}}{2b}$. **234.** $\dfrac{\pi}{2}e^{-ab}$.

Список литературы

1. Бицадзе А.В. *Основы теории аналитических функций.* – М.: Наука, 1984.

2. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. *Сборник задач по теории функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1988.

3. Евграфов М.А. *Аналитические функции.* – М.: Наука, 1968.

4. Маркушевич А.И. *Теория аналитических функций.* – М.: Наука, 1967. – Т. 1; 1968. – Т. 2.

5. Маркушевич А.И., Маркушевич Л.А. *Введение в теорию аналитических функций.* – М.: Просвещение, 1977.

6. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. *Лекции по теории функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1989.

7. Шабат Б.В. *Введение в комплексный анализ.* – М.: Наука. – Ч. 1, 1985.

Содержание