

Математический анализ (промежуточная весенняя сессия 2018-2019 уч.год)

Лектор Шипина Т.Н.

Теоретические разделы

1. Неопределенный интеграл и его свойства.
2. Основные методы интегрирования неопределенных интегралов (интегрирование по частям, внесение под знак дифференциала, замена переменных)
3. Интегрирование рациональных функций
4. Интегрирование иррациональных функций.
5. Интегрирование тригонометрических функций
6. Интегрирование трансцендентных функций
7. Определенный интеграл. Необходимое условие интегрируемости.
8. Нижние и верхние суммы Дарбу. Критерий интегрируемости
9. Интегрируемость непрерывных и монотонных функций.
10. Свойства определенного интеграла.
11. Первая теорема о среднем.
12. Интеграл с переменным верхним пределом.
13. Формула Ньютона-Лейбница. Методы интегрирования.
14. Площадь плоской фигуры. Мера Жордана.
15. Спряжляемые и гладкие кривые. Длина кривой.
16. Несобственный интеграл и его свойства
17. Критерий Коши существования несобственного интеграла.
18. Признаки сравнения для несобственных интегралов от неотрицательных функций.
19. Признак Абеля сходимости несобственного интеграла.
20. Признак Дирихле сходимости несобственного интеграла.
21. Абсолютная и условная сходимость несобственного интеграла.
22. Интеграл в смысле главного значения. Примеры.

Теоремы с доказательством

- Свойства неопределенного интеграла.
- Свойства определенного интеграла.
- Определенный интеграл. Критерий интегрируемости.
- Достаточные условия существования определенного интеграла.
- Первая теорема о среднем.
- Критерий Коши существования несобственного интеграла.
- Признак Абеля сходимости несобственного интеграла.
- Признак Дирихле сходимости несобственного интеграла.
- Доказательство формулы вычисления длины кривой.

Практические задания

1. Вычислить интеграл

$$\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x\sqrt{x}} dx;$$

$$\int \sin x \cos^2 x dx ;$$

$$\int (x-7) \sin 3x dx;$$

$$\int e^{2x} \cos 3x dx ;$$

$$\int \frac{(3x+8)dx}{x^2+3x-10} ;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} ;$$

$$\int \frac{1-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2-x^2}} dx;$$

$$\int \frac{dx}{x \ln x} ;$$

$$\int \frac{x dx}{\cos^2 x} ;$$

$$\int \frac{(6x-1)dx}{x^2-4x+13} ;$$

$$\int \frac{dx}{3+5 \cos x} ;$$

$$\int \frac{\sqrt{x}-2}{x(x^3+1)} dx ;$$

$$\int x^3 e^{1-x^2} dx;$$

$$\int \frac{\cos \ln x}{x} dx;$$

$$\int \operatorname{arctg} x dx ;$$

$$\int \frac{(x+1)^2}{x^2-2x-15} dx;$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{4+\cos x} dx;$$

$$\int \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} \cdot \frac{dx}{x};$$

$$\int \left(x + x^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} dx;$$

2. Для функции $f(x) = 2x + 1$ на отрезке $[0; 4]$ записать интегральную сумму и найти ее значение, разбив отрезок $[0; 4]$ на 4 равные части. Точки $\xi_i, i = 1, \dots, 4$, выбрать самостоятельно.
3. Для функции $f(x) = (x - 2)^2 - 1$ на отрезке $[0; 4]$ записать верхнюю и нижнюю интегральные суммы Дарбу и найти их значения, разбив отрезок $[0; 4]$ на 4 равные части.
4. Доказать, что функция $F(x) = \int_0^x t^4 \cdot e^{-t^2} dt$ нечетная.
5. Доказать, что функция $F(x) = \int_0^x t^4 \cdot e^{-t^2} dt$ нечетная.
6. Доказать, что функцию $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ можно дифференцировать и найти ее производную.
7. Доказать или опровергнуть утверждения:
 - Если определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует, то подынтегральная функция $f(x)$ ограничена.
 - Если подынтегральная функция $f(x)$ ограничена, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует.
 - Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$.
 - Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.
 - Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится.
 - Если $f(x) \geq 0 \forall x \in [a; +\infty)$ и существует константа C такая, что $\int_a^b f(x)dx \leq C \forall b > a$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

8. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+1}};$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2+1)}{x^2} dx;$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}};$$

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{1-x}\right) \cdot \frac{dx}{1-x};$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + \arctg x}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^3 + \sqrt{x}} dx$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{4 + \cos 8x}{e^x} dx$$

$$\int_1^2 \frac{(x-2)dx}{x^3 - 3x^2 + 4}$$

$$\int_3^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^5 + 4}}$$

$$\int_3^{+\infty} e^{-3x} \cdot \frac{\arctg x}{\sqrt{x^5 + 4}} dx$$

Список литературы

1. Л.Д. Кудрявцев и др. Сборник задач по математическому анализу. **Том2.** –Москва: ФИЗМАТЛИТ. 2003.
2. А.М.Кытманов и др. Математический анализ с элементами алгебры, геометрии и функционального анализа (учебное пособие) (<http://math.sfu-kras.ru/sites/default/files/matananaliz2.pdf>).

ВАРИАНТ 0

1. Дать определение:
 - нижней суммы Дарбу;
 - условно сходящегося несобственного интеграла.
2. Доказать, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a; b]$, то функция $\alpha f(x) + \beta g(x)$ также интегрируема на $[a; b]$ и имеет место формула

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

3. Сформулировать и доказать критерий Коши сходимости несобственного интеграла.
4. Вычислить интегралы:

$$\int \frac{\cos \ln x}{x} dx,$$

$$\int \frac{(3x+8)dx}{x^2+3x-10}.$$

5. Для функции $f(x) = 2x + 1$ на отрезке $[0; 4]$ записать интегральную сумму и найти ее значение, разбив отрезок $[0; 4]$ на 4 равные части. Точки $\xi_i, i = 1, \dots, 4$, выбрать самостоятельно.
6. Доказать, что функция $F(x) = \int_0^x t^4 \cdot e^{-t^2} dt$ нечетная.