ПРОГРАММА ПО АЛГЕБРЕ

1. Системы линейных алгебраических уравнений.

Основные понятия: основная и расширенная матрицы системы; решение системы; совместные и несовместные, определенные и неопределенные системы; эквивалентные системы; общее и частное решение системы; элементарные преобразования системы.

Теоремы и методы: эквивалентность систем при элементарных преобразованиях; метод Гаусса.

Задачи: найти общее (частное) решение системы уравнений; исследовать систему с параметрами.

2. Перестановки.

Основные понятия: перестановка; инверсия; четная и нечетная перестановка; транспозиция.

Теоремы и методы: теорема о числе перестановок; теорема об изменении четности перестановки при траспозиции.

Задачи: найти число инверсий в перестановке; определить четность перестановки.

3. Теория определителей.

Основные понятия: определитель матрицы; минор и дополнительный минор; алгебраическое дополнение элемента.

Теоремы и методы: свойства определителя (определитель треугольной матрицы; определитель транспонированной матрицы; аддитивность определителя по строкам и столбцам; изменение определителя при перестановке строк или столбцов; равенство нулю определителя с нулевой строкой, с пропорциональными строками или столбцами); теорема о произведении минора на дополнительный минор; разложение Лапласа; методы вычисления определителя (приведение к треугольному виду; рекуррентных соотношений; выделения линейных множителей; представления в виде суммы определителей); формулы Крамера.

Задачи: вычислить определитель; решить систему уравнений, используя формулы Крамера.

4. Основные алгебраические системы.

Основные понятия: бинарная алгебраическая операция, нейтральный и обратный элементы; аксиомы коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности; группа, кольцо, поле.

Теоремы и методы: единственность нейтрального и обратного элементов; следствия из аксиом коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.

Задачи: доказать или опровергнуть утверждение о том, что множество с заданной на нем операцией образует группу, кольцо, поле.

Задачи

1. Найти решения системы или доказать её несовместность

$$A)\ \begin{cases} x_2+x_3+x_4=1,\\ x_1+x_3+x_4=2,\\ x_1+x_2+x_4=3,\\ x_1+x_2+x_3=4; \end{cases} \qquad B)\ \begin{cases} 2x_1-2x_2-3x_3=-1,\\ 4x_1-4x_2+x_3=19,\\ 6x_1-6x_2-2x_3=-11; \end{cases}$$

$$C)\ \begin{cases} -x_1+4x_2-3x_3+3x_4 &= 4,\\ x_1-3x_2+7x_3-5x_4 &= -1,\\ 6x_1-21x_2+31x_3-28x_4 &= -11,\\ 4x_1-15x_2+17x_3-18x_4 &= -9; \end{cases} \qquad D)\ \begin{cases} 2x_1-x_2=0,\\ -x_1+2x_2-x_3=0,\\ -x_2+2x_3-x_4=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ -x_{n-2}+2x_{n-1}-x_n=0,\\ -x_{n-1}+x_n=1. \end{cases}$$

2. Найти решение системы или установить её несовместность в зависимости от значений параметров a, b

$$\begin{cases} ax+y+z &= 4,\\ x+by+z &= 3,\\ x+2by+z &= 4. \end{cases}$$

3. Определить число инверсий в перестановке

$$2n, 2n-2, ..., 4, 2, 2n-1, 2n-3, ..., 3, 1$$

и её четность в зависимости от n.

4. Вычислить определители

$$A)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \qquad B)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0\\ . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix},$$

$$C)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n\\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n\\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n\\ . & . & . & . & . & . & .\\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}.$$

5. Пусть $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ — фиксированные действительные числа. Определим на $\mathbb{R}$ операции $\oplus$ и $\odot$, полагая

$$a \oplus b = \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3, \qquad a \odot b = \beta_1 a + \beta_2 b + \beta_3 ab + \beta_4$$

для любых $a, b \in \mathbb{R}$.

1) Найти необходимые и достаточные условия на константы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, при которых $\langle \mathbb{R}, \oplus \rangle$ — абелева группа.

2) Найти необходимые и достаточные условия на константы $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, при которых операция $\odot$ является: коммутативной, ассоциативной.

3) Найти необходимые и достаточные условия на константы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, при которых $\langle \mathbb{R}, \oplus, \odot \rangle$ — поле.